УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ”

На правах рукописи
УДК 512.542

**РЯБЧЕНКО
АЛЕКСЕЙ ИВАНОВИЧ**

ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ С ЗАДАННОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДФОРМАЦИЙ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Научный руководитель — доктор
физико-математических наук,
доцент В.Г.Сафонов

Гомель, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Рассматриваются только конечные группы.

$\subseteq$ — знак включения множеств.

$\subset$ — знак строгого включения множеств.

$\cap$ и $\cup$ — соответственно знаки пересечения и объединения множеств.

$\varnothing$ — пустое множество.

$\{\alpha \mid \beta\}$ — множество всех α, для которых выполняется условие β.

$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

p, q, r — простые числа.

π, ω — некоторые множества простых чисел, т.е. π, $\omega \subseteq \mathbb{P}$.

$\pi' = \mathbb{P} \backslash \pi$ — дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$; в частности, $p' = \mathbb{P} \backslash \{p\}$.

ω' — дополнение к множеству простых чисел ω во множестве $\mathbb{P}$.

$|x|$ — порядок элемента x группы G.

$|G|$ — порядок группы G.

$\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей числа n.

$\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.

$\pi(\mathfrak{X})$ — объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$.

$A \simeq B$ — A и B изоморфны.

$A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B.

$N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G.

$C_G(H)$ — централизатор подгруппы H в группе G.

$O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G.

$O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G.

$G_{\omega d}$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G, у которой для любого ее композиционного фактора H/K имеет место $\pi(H/K) \cap \omega \neq \emptyset$.

Z_n — циклическая группа порядка n.

$[A]B$ — полупрямое произведение нормальной группы A и группы B.

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини неединичной группы G, т.е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G.

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т.е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G.

$F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G.

G' — коммутант группы G, т.е. подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G.

Минимальная нормальная подгруппа группы G — неединичная нормальная подгруппа группы G, не содержащая собственных неединичных нормальных подгрупп группы G.

Цоколь группы G — произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G.

Группу G называют:

p–группой, если G — группа, для которой $\pi(G) = \{p\}$;

π–группой, если G — группа, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$;

p-замкнутой, если силовская p-подгруппа группы G нормальна в G;

π-замкнутой, если она имеет нормальную холловскую π-подгруппу;

нильпотентной, если все ее силовские подгруппы нормальны;

группой Шмидта, если она является конечной ненильпотентной группой, все собственные подгруппы которой нильпотентны (т.е. является минимальной ненильпотентной группой);

p-нильпотентной, если p'-холловская подгруппа группы G нормальна в G;

π-нильпотентной, если она является p-нильпотентой для всех $p \in \pi$;

разрешимой, если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$;

p-разрешимой, если существует нормальный ряд, факторы которого либо p-группы, либо p'-группы;

π-разрешимой, если $|\pi(H/K)| = 1$ для каждого ее главного πd-фактора H/K;

монолитической группой — если она неединична и имеет единственную минимальную нормальную подгруппу;

$\mathfrak{X}$-группой, если G — группа, принадлежащая классу групп $\mathfrak{X}$.

Экспонента группы G — это наименьшее общее кратное порядков всех ее элементов.

Классы групп — совокупности групп, замкнутые относительно изоморфизмов. Классы групп обозначаются прописными готическими буквами ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ и др.). За некоторыми классами закреплены стандартные обозначения:

$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп;

$\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$;

$\mathfrak{G}$ — класс всех групп;

$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}_p$ — класс всех p–групп;

$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп;

$\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;

$\mathfrak{G}_{\omega'}$ — класс всех ω'-групп;

$\mathfrak{G}_{\omega d}$ — класс всех единичных и таких неединичных групп, у которых каждый композиционный фактор A таков, что $\omega \cap \pi(A) \neq \varnothing$;

$\mathfrak{G}_{\omega}$ — класс всех ω-групп;

$\mathfrak{G}_{p'}$ — класс всех p'-групп;

$\mathbf{H}(\mathfrak{X})$ — класс всех гомоморфных образов групп из $\mathfrak{X}$;

$\mathbf{R}_0(\mathfrak{X})$ — класс всех таких групп G, что в G имеется система подгрупп $N_1, N_2, \ldots, N_t$ со свойствами $N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_t = 1$ и $G/N_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Формация — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формации, как и классы групп, обозначаются прописными готическими буквами.

$G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$–корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — формация, то $G^{\mathfrak{F}}$ является наименьшей нормальной подгруппой группы G, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$.

$G_{\mathfrak{F}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$.

Подформация формации $\mathfrak{F}$ — такая формация $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Насыщенная формация — такая формация $\mathfrak{F}$, что для любой группы G, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

p-Насыщенная формация — такая формация $\mathfrak{F}$, что для любой группы G, если $G/(\Phi(G) \cap O_p(G)) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

ω-Насыщенная формация — такая формация $\mathfrak{F}$, что для любой группы G, если $G/(\Phi(G) \cap O_\omega) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Всякую функцию вида $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ называют *ω-локальным спутником.* Если f — произвольный ω-локальный спутник, то $LF_\omega(f) = \{G|G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является *ω-локальной формацией*, а f ее *ω-локальный спутник.* Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f называют *внутренним ω-локальным спутником.*

Всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно ω-насыщенной*, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями.

Максимальная подформация формации $\mathfrak{F}$ — такая собственная подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$, что для любой формации $\mathfrak{H}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, следует $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$.

l — совокупность всех насыщенных формаций.

l^ω — совокупность всех ω-насыщенных формаций.

l_n^ω — совокупность всех n-кратно ω-насыщенных формаций.

$\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

$l\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

$l^\omega\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

$l_n^\omega \mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех n-кратно ω-насыщенных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Решетка формаций — такая непустая совокупность формаций Ω, что для любых формаций $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Omega$ обе формации $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ принадлежат Ω.

Решетка насыщенных формаций — такая непустая совокупность насыщенных формаций Ω, что для любых насыщенных формаций $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Omega$ обе насыщенные формации $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} = l\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ принадлежат Ω.

Решетка ω-насыщенных формаций — такая непустая совокупность ω-насыщенных формаций Ω, что для любых ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Omega$ обе ω-насыщенные формации $\mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H} = l^\omega \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ принадлежат Ω.

Решетка n-кратно ω-насыщенных формаций — такая непустая совокупность n-кратно ω-насыщенных формаций Ω, что для любых n-кратно ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Omega$ обе n-кратно ω-насыщенные формации $\mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H} = l_n^\omega \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ принадлежат Ω.

Через $\mathfrak{F}/\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают решетку формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{F}/_l \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают решетку насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают решетку ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{F}/_n^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают решетку n-кратно ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

Длину решетки $\mathfrak{F}/\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|$ и называют $\mathfrak{H}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$.

Длину решетки $\mathfrak{F}/_l \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_l$ и называют насыщенным $\mathfrak{H}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}_l$-дефектом формации $\mathfrak{F}$.

Длину решетки $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|^\omega$ и называют ω-насыщенным $\mathfrak{H}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}^\omega$-дефектом формации $\mathfrak{F}$.

Длину решетки $\mathfrak{F}/_n^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_n^\omega$ и называют n-кратно ω-насыщенным $\mathfrak{H}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}_n^\omega$-дефектом формации $\mathfrak{F}$.

Неприводимая формация — такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \neq \mathrm{form}(\cup \mathfrak{F}_i)$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех собственных подформаций формации $\mathfrak{F}$.

l-Неприводимая формация — такая насыщенная формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \neq l\mathrm{form}(\cup \mathfrak{F}_i)$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех собственных насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$.

l^ω-Неприводимая формация — такая ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \neq l^\omega \mathrm{form}(\cup \mathfrak{F}_i)$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех собственных ω-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$.

l_n^ω*-Неприводимая формация* — такая n-кратно ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \neq l^\omega \mathrm{form}(\cup \mathfrak{F}_i)$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество всех собственных n-кратно ω-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Однопорожденная формация $\mathfrak{F}$ — такая формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = \mathrm{form} G$.

Однопорожденная насыщенная формация $\mathfrak{F}$ — такая насыщенная формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = l\mathrm{form} G$.

Однопорожденная ω*-насыщенная формация* $\mathfrak{F}$ — такая ω-насыщенная формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$.

Однопорожденная n*-кратно* ω*-насыщенная формация* $\mathfrak{F}$ — такая n-кратно ω-насыщенная формация, что для некоторой группы G имеет место $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} G$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп и p — простое число. Тогда полагают, что

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) | G \in \mathfrak{X}), & \textit{при}\, p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \emptyset, & \textit{при}\, p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Минимальный ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}$ — такой ω-локальный спутник f, что $f = \bigcap_{i \in I} f_i$, где $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω-локальных спутников формации $\mathfrak{F}$.

$f \leq h$, если $f(a) \subseteq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, где f и h — ω-локальные спутники.

Канонический спутник ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ — такой ее внутренний спутник F, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(p)$, для всех $p \in \omega$.

Спутник формации называется l*-значным*, если все его значения содержатся в l.

ω-Локальный спутник формации называется l^ω*-значным*, если все его значения содержатся в l^ω.

n-Кратно ω-локальный спутник формации называется l_n^ω*-значным*, если все его значения содержатся в l_n^ω.

Насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется *минимальной насыщенной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* (или $\mathfrak{H}_l$*-критической*), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

ω-Насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется *минимальной* ω*-насыщенной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* (или $\mathfrak{H}^\omega$*-критической*), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

n-Кратно ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется *минимальной* n*-кратно* ω*-насыщенной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* (или $\mathfrak{H}_n^\omega$*-критической*), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные n-кратно ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

В ограниченной решетке L элемент a называется *дополнением* элемента b, если $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. Дополнение элемента a также обозначают a'.

Пусть $a \in [b, c]$, тогда элемент x называется *относительным дополнением* элемента a в интервале $[b, c]$, если $a \wedge x = b$ и $a \vee x = c$.

Ограниченная решетка, в которой каждый элемент имеет дополнение, называется *решеткой с дополнениями.*

Булевой решеткой называется дистрибутивная решетка с дополнениями.

Пусть L — полная решетка и $a \in L$. Элемент a называется *компактным* в L, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из $a \leq \vee X$ следует, что $a \leq \vee X_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$.

Полная решетка называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из интенсивно развивающихся направлений современной алгебры является изучение классов алгебраических систем, в частности, классов групп. Первоначальный этап развития этой теории связан с трудами Г. Биркгофа и Б.Х. Неймана 30-ых годов прошлого столетия. Следует отметить, что в этих работах, в основном, рассматривались абстрактные классы, заведомо содержащие бесконечные группы (многообразия, квазимногообразия групп, радикальные классы групп и др.). Активное изучение различных классов конечных групп началось с 1963 года после выхода работы Гашюца «Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen» [1]. Ключевое место в таких исследованиях заняли формации, т.е. классы конечных групп, замкнутые относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. И хотя вначале эти классы рассматривались, прежде всего, как рабочий инструмент и играли только вспомогательную роль при разработке методов отыскания подгрупп в конечных непростых группах, позднее сами формации стали рассматриваться как самостоятельные объекты изучения (см., например, [2–6]).

По мере развития теории формаций важное применение к исследованию подгруппового строения конечных непростых групп нашли насыщенные и ω-насыщенные (или частично насыщенные) формации. Для любого непустого множества простых чисел ω формацию $\mathfrak{F}$ называют ω-насыщенной, если из $G/(O_\omega(G) \cap \Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Необходимость изучения ω-насыщенных формаций обусловлена возможностью их использования при исследовании факторизации насыщенных формаций [7], сводимостью исследования любых насыщенных формаций во многих важных случаях к некоторой системе частично насыщенных формаций [8], полезностью частично насыщенных формаций в прикладном аспекте при изучении подгруппового строения конечных непростых групп [8–18].

Важной задачей теории частично насыщенных формаций является проблема классификации ω-насыщенных формаций. На пути анализа и решения данной задачи было предложено много различных подходов, один из которых связан с изучением ω-насыщенных формаций с различными заданными системами подформаций, используя результаты и конструкции общей теории решеток. Привлечение методов теории решеток к изучению классов групп позволило не только значительно упростить доказательства многих уже известных теорем, но и с успехом решать ряд открытых вопросов, связанных с изучением внутреннего строения таких классов. Впервые эффективность использования методов теории решеток при изучении формаций конечных групп показал А.Н. Скиба [19, 20]. При этом основой разработки решеточных методов исследования (насыщенных) формаций групп стала доказанная им в работе [19] модулярность решетки всех (насыщенных) формаций.

В дальнейшем, при изучении формаций других типов, рассматривался вопрос о модулярности или дистрибутивности соответствующих решеток формаций. Так, в монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [3] была установлена модулярность решетки всех n-кратно насыщенных формаций; модулярность решетки функторно замкнутых n-кратно насыщенных формаций, а также дистрибутивность решетки всех разрешимых тотально насыщенных формаций доказана А.Н. Скибой в монографии [4]; Баллестером-Болиншес и Л.А. Шеметковым [15] было показано, что модулярна решетка ω-насыщенных формаций; А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым установлена модулярность решетки n-кратно ω-насыщенных формаций [14]. Развитие этого результата на случай функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций получено И.П. Шабалиной [21]. Дистрибутивность решетки всех (функторно замкнутых) тотально насыщенных формаций доказана В.Г. Сафоновым [22, 23]. Некоторые свойства и тождества решетки всех ω-насыщенных формаций были рассмотрены Л.А. Шеметковым, А.Н. Скибой и Н.Н. Воробьевым в работах [24, 25].

Эти результаты позволяют эффективно применять элементы общей теории решеток в вопросах изучения и классификации частично насыщенных формаций. Существенным рабочим инструментом при изучении решеточного строения ω-насыщенных формаций играет понятие $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта, являющееся естественным обобщением понятия $\mathfrak{H}$-дефекта насыщенной формации, введенного А.Н. Скибой и Е.А. Таргонским [26]. Напомним, что под $\mathfrak{H}$-дефектом насыщенной формации $\mathfrak{F}$ понимают длину решетки насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Аналогично определяется $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект ω-насыщенной формации. Основным результатом работы [26] стала классификация насыщенных формаций с нильпотентным дефектом ≤ 2. Впоследствии этот результат получил развитие в разных направлениях, поскольку нашел широкое применение в теоретических исследованиях. С одной стороны, в качестве $\mathfrak{H}$ стали рассматривать другие достаточно хорошо известные формации конечных групп: А.Н. Скибой изучались насыщенные формации с p-разложимым дефектом ≤ 2 [27], В.В. Аниськовым получено описание насыщенных формаций с $\mathfrak{H}$-дефектом ≤ 2 для произвольной 2-кратно насыщенной формации $\mathfrak{H}$ [28] и др. В теории частично насыщенных формаций Н.Г. Жевновой дано описание ω-насыщенных ненильпотентных формаций с максимальной нильпотентной ω-насыщенной подформацией [29], В.Г. Сафоновым и И.Н. Сафоновой изучены ω-насыщенные формации с разрешимым дефектом ≤ 2 [30].

С другой стороны, исследовались решетки насыщенных формаций большей длины (В.Г. Сафонов [31, 32]). Кроме того, такой подход нашел применение и при изучении структурного строения формаций конечных групп других типов (n-кратно насыщенные формации, тотально насыщенные формации [32] и др.).

В связи с тем, что в общем случае решетка ω-насыщенных подформаций у произвольной ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ бесконечна, то при изучении внутреннего строения формации $\mathfrak{F}$ довольно затруднительно применение индуктивных рассуждений. Это обстоятельство привело к необходимости разработки особых методов исследования частично насыщенных формаций, аналогичных методам теории насыщенных формаций (Л.А. Шеметков, [33], А.Н. Скиба, [34]) и связанных с понятием критической формации. Напомним, что ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией или, иначе, $\mathfrak{H}^{\omega}$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ для всякой собственной ω-насыщенной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$. Общая проблема изучения формаций такого рода впервые была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1980 году [33]. Исследованию критических насыщенных формаций был посвящен цикл работ А.Н. Скибы [35–39]. Исчерпывающий результат в этом направлении был достигнут в работе [39], где описаны минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации для произвольной формации $\mathfrak{H}$ классического типа. Основы теории n-кратно насыщенных минимальных не $\mathfrak{H}$-формаций заложены А.Н. Скибой в работе [40]. Позднее результаты этой работы получили развитие в исследованиях В.Г. Сафонова [41, 42], Го Вэньбиня и К.П. Шама [43], Го Вэньбиня [44]. Изучение $\mathfrak{H}^{\omega}$-критических формаций было начато Джерадином Джехадом в работе [10], где были описаны минимальные ω-насыщенные ненильпотентные формации. Позднее В.Н. Рыжик [45] были исследованы минимальные ω-насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации в случае, когда $\mathfrak{H}$ — произвольная 2-кратно насыщенная формация. В цикле работ И.Н. Сафоновой [46–52] теория $\mathfrak{H}^{\omega}$-критических формаций получила свое дальнейшее развитие. Завершающим результатом стало описание $\mathfrak{H}^{\omega}$-критических формаций [52] для всякой формации $\mathfrak{H}$ классического типа.

Вместе с тем, оставались неисследованными задачи описания минимальных n-кратно ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, классификации ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта ≤ 2 для произвольной формации $\mathfrak{H}$ классического типа, описания n-кратно ω-насыщенных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2 (проблема Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы [14]). Решению этих актуальных задач и посвящена данная диссертационная работа.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем:

«Структурная теория формаций и других классов алгебр». Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утверждённый решением Президиума НАН Беларуси № 94 от 05.07.2001 г. Государственная программа фундаментальных исследований «Математические структуры» (номер госрегистрации в БелИСА — 20011225), тема выполнялась в 2001–2005 гг.

«Развитие концепции факторной центральности и ее применение к анализу классов групп и других систем» Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Тема входит в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г. Государственная программа фундаментальных исследований «Математические модели» (номер госрегистрации в БелИСА — 20061155), выполнение темы запланировано на 2006–2010 гг.

«Частично насыщенные формации ограниченного $\mathfrak{H}$-дефекта» Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, отдельный аспирантский проект Министерства образования Республики Беларусь (номер госрегистрации в БелИСА — 2007990). Тема выполнялась в 2007 году.

«Насыщенные классы конечных групп, конечномерных линейных алгебр, их алгебра и приложения» Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, отдельный проект Министерства образования Республики Беларусь (номер госрегистрации в БелИСА — 2008470). Выполнение темы запланировано на 2008-2010 гг.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является получение описания строения ω-насыщенных формаций конечных групп, имеющих заданную решетку подформаций. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

— получить классификацию ω-насыщенных формаций, обладающих $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефектом ≤ 2, где $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа;

— дать описание n-кратно ω-насыщенных формаций нильпотентного дефекта 2 (А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков [14, проблема 5]);

— найти критерий булевости решетки всех ω-насыщенных подформаций, заключенных между ω-насыщенной формацией $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — разрешимая формация классического типа.

Объектом исследования являются n-кратно ω-насыщенные формации конечных групп ограниченного $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта.

Предмет исследования — структурные свойства n-кратно ω-насыщенных формаций конечных групп ограниченного $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта ≤ 2, где $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа:

— классификация ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 1, теорема 2.1.13;

— описание структурного строения приводимых ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 2, теорема 2.3.2;

— описание конечных групп, порождающих неприводимые ω-насыщенные формации $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 2, теорема 2.4.4.

2. Решение проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова об описании n-кратно ω-насыщенных формаций нильпотентного l_n^{ω}-дефекта ≤ 2 [14, проблема 5]:

— классификация минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формаций, теорема 3.1.10;

— описание внутреннего решеточного строения l_n^{ω}-приводимых формаций нильпотентного l_n^{ω}-дефекта ≤ 2, теоремы 3.2.7 и 3.3.2;

— описание конечных групп, порождающих l_n^{ω}-неприводимые формации нильпотентного l_n^{ω}-дефекта 2, теорема 3.4.2.

3. Критерий булевости решетки всех ω-насыщенных подформаций, заключенных между ω-насыщенной формацией $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — разрешимая формация классического типа, теорема 4.1.14.

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, доцента Сафонова Василия Григорьевича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместно опубликованных работах [1-А,3-А,8-А,12-А,13-А,14-А,16-А,22-А] идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем. Остальные работы выполнены соискателем самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, а также на следующих конференциях:

— 5th International Algebraic Conference in Ukraine (Odessa, 20–27 July 2005);

— Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов — 2005» (Севастополь, 12–16 апреля 2005 г.);

— VIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 14–16 марта 2005 г.);

— Юбилейной научно-практической конференции, посвященной 75-летию со дня основания Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (Гомель, 14–15 июня 2005 г.);

— Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов — 2006» (Севастополь, 12-15 апреля 2006 г.);

— Международной алгебраической конференции «Классы групп, алгебр и их приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова (Гомель, 9–11 июля 2007 г.);

— The 6th International Algebraic Conference in Ukraine (Kamyanets-Podilsky, 1–7 July 2007);

— XI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 17–19 марта 2008 г.);

— Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г.).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертации опубликовано 22 работы. Из них 8 статей опубликовано в научных журналах, включенных в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований, утвержденный ВАК, 2 статьи в сборниках научных работ, 2 препринта и 10 материалов и тезисов докладов конференций. Общий объем опубликованных материалов — 4,75 авторских листа, в том числе: статей в научных журналах — 3,0 авторских листа; статей в сборниках научных работ — 0,29 авторских листа; препринтов — 1,03 авторских листа; материалов и тезисов докладов конференций — 0,44 авторских листа.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 73 наименований использованных источников и 22 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 85 страниц, из них 8 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, доценту Сафонову Василию Григорьевичу за внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ГЛАВА 1

ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной главе приводятся основные этапы развития теории частично насыщенных формаций, дается описание объектов исследования диссертационной работы и используемых при проведении исследования методов, формулируются нерешенные вопросы и задачи.

1.1 Аналитический обзор литературы. Постановка задач

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными. Используются стандартные определения и обозначения, принятые в работах [2–6, 14, 53, 54].

В процессе изучения подгруппового строения конечных разрешимых групп В. Гашюцом в 1963 году в работе «Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen» [1] были предложены новые, формационные методы исследования. Базовым понятием является здесь введенное им понятие формации, т.е. класса групп, замкнутого относительно факторгрупп и конечных подпрямых произведений. Эффективное применение формаций к изучению подгруппового строения групп и обилие полученных практических результатов вызвало огромный интерес к этим классам. Большое количество исследований в этом направлении привело к возникновению новой теории — теории формаций конечных групп. Основные этапы развития этой теории и наиболее значимые результаты отражены в монографиях [2–6].

По мере развития теории формаций широкое приложение к исследованию подгруппвого строения конечных непростых групп получили насыщенные и ω-насыщенные формации. Напомним, что формацию $\mathfrak{F}$ называют насыщенной, если для любой группы G, такой, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, следует $G \in \mathfrak{F}$. Если для некоторой функции f, заданной на множестве всех простых чисел со значениями во множестве формаций групп, выполняется равенство $\mathfrak{F} = \{G|G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)\}$, то формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной [16].

ω-Локальным спутником [14] называют функцию f, заданную на множестве $\omega \bigcup \{\omega'\}$, со значениями во множестве всех формаций конечных групп. Если формация $\mathfrak{F}$ состоит из тех и только тех групп G, для которых имеет место $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \bigcap \pi(G)$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ — *ω-локальная* формация, а f — ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют ω-насыщенной, если из $G/O_\omega(G) \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Из результатов работ В. Гашюца [1], У. Любезедер [55] и П. Шмидта [56] следует, что всякая формация локальна тогда и только тогда, когда она насыщена, а по теореме 1 [14] формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной тогда и только тогда, когда она ω-локальна. Ввиду этого замечания будем далее использовать термины «насыщенная» и «ω-насыщенная формация», если формация является соответственно локальной и ω-локальной.

Изучение ω-насыщенных формаций обусловлено рядом причин. Во-первых, как было замечено в работе [7], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то формация $\mathfrak{H}$ является p-насыщенной для всех $p \in P \backslash \pi(\mathfrak{M})$. Следовательно, исследование факторизации насыщенных формаций приводит к необходимости изучения частично насыщенных формаций. Во-вторых, как установлено в [8], изучение любых насыщенных формаций во многих важных случаях сводится к исследованию некоторой системы частично насыщенных формаций. В-третьих, как показывают исследования [8–18], частично насыщенные формации весьма полезны в прикладном аспекте при изучении подгруппового строения конечных непростых групп. Эти обстоятельства стимулировали поиск новых методов исследования частично насыщенных формаций.

Одной из центральных задач теории частично насыщенных формаций является проблема классификации ω-насыщенных формаций. На пути анализа и решения данной задачи было предложено много различных подходов, один из которых связан с изучением ω-насыщенных формаций с различными заданными системами подформаций, используя результаты и конструкции общей теории решеток. Привлечение методов теории решеток к изучению классов групп позволило не только значительно упростить доказательства многих уже известных теорем, но и с успехом решать ряд открытых вопросов, связанных с изучением внутреннего строения таких классов. Эффективность использования методов теории решеток при изучении формаций конечных групп была показана А.Н. Скибой [19, 20]. При этом основой разработки решеточных методов исследования (насыщенных) формаций групп стала доказанная им в работе [19] модулярность решетки всех (насыщенных) формаций.

Напомним, что всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Если формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-насыщенной для любого n из $\mathbb{N}$, то $\mathfrak{F}$ называют тотально ω-насыщенной.

В дальнейшем рассматривался вопрос о модулярности и дистрибутивности решеток формаций других типов. В монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы [3] была доказана модулярность решетки всех n-кратно насыщенных формаций. Баллестером-Болиншесом и Л.А. Шеметковым [15] было показано, что модулярна решетка всех ω-насыщенных формаций. Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой была установлена модулярность решетки n-кратно ω-насыщенных формаций [14]. И.П. Шабалиной [21] установлена алгебраичность и модулярность решетки всех функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. В работе Блессеноля и Брюстеря [57] в классе конечных разрешимых групп была доказана дистрибутивность решетки всех формаций, заключенных между формациями $\mathfrak{F}$ и $N\mathfrak{F}$, где $N\mathfrak{F}$ — класс всех тех групп, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал не содержит фраттиниевых главных факторов. В работе А.Н. Скибы [58] найдена серия наследственных формаций с дистрибутивной решеткой наследственных подформаций, а в монографии [4] доказана дистрибутивность решетки всех разрешимых тотально насыщенных формаций. В.Г. Сафоновым [22, 23] установлена дистрибутивность решетки тотально насыщенных формаций. Некоторые свойства и тождества решетки ω-насыщенных формаций были рассмотрены Л.А. Шеметковым, А.Н. Скибой и Н.Н. Воробьевым в работах [24, 25]. Эти результаты позволили широко применять элементы общей теории решеток в вопросах изучения и классификации формаций таких типов.

Поскольку решетка ω-насыщенных подформаций у ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ в общем случае бесконечна, то при изучении внутреннего строения $\mathfrak{F}$ весьма затруднительно применение индуктивных рассуждений. Это обстоятельство привело к необходимости разработки особых методов исследования ω-насыщенных формаций, связанных с понятием критического класса групп. Как правило, классы такого типа порождаются одной конечной группой, и впервые они рассматривались в работе Г. Хигмана [59] (см. также гл. 5 [60]), где были выделены некоторые классы минимальных неабелевых многообразий, т.е. неабелевых многообразий, у которых все их собственные подмногообразия абелевы. Полная классификация минимальных неабелевых многообразий может быть получена как следствие классификации минимальных неабелевых формаций конечных групп, полученной впервые в работе А.Н. Скибы [36].

Напомним, что насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией (Л.А. Шеметков, [33]) или, иначе, $\mathfrak{H}_l$-критической формацией (А.Н. Скиба, [34]), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ для всякой собственной насыщенной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$. Общая проблема изучения формаций такого рода впервые была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1980 году [33]. Исследованию критических насыщенных формаций был посвящен цикл работ А.Н. Скибы [35–39]. Исчерпывающий результат в этом направлении был достигнут в работе [39], где описаны минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации для произвольной формации $\mathfrak{H}$ классического типа. Основы теории n-кратно насыщенных минимальных не $\mathfrak{H}$-формаций заложены А.Н. Скибой в работе [40]. Позднее результаты этой работы получили развитие в исследованиях В.Г. Сафонова [41, 42], Го Вэньбиня и К.П. Шама [43], Го Вэньбиня [44]. Изучение $\mathfrak{H}^{\omega}$-критических формаций было начато Джерадином Джехадом в работе [10], где были описаны минимальные ω-насыщенные ненильпотентные формации. Позднее В.Н. Рыжик [45] были исследованы минимальные ω-насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации в случае, когда $\mathfrak{H}$ — произвольная 2-кратно насыщенная формация. В цикле работ И.Н. Сафоновой [46–52] теория $\mathfrak{H}^{\omega}$-критических формаций получила свое дальнейшее развитие. Завершающим результатом стало описание $\mathfrak{H}^{\omega}$-критических формаций [52] для всякой формации $\mathfrak{H}$ классического типа. Заметим, что до настоящего времени вопрос классификации минимальных n-кратно ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций остается открытым.

Основным стимулом описания $\mathfrak{H}$-критических формаций является прежде всего их практическая значимость и простота применения при изучении соответствующих классов групп. Уже первые результаты о минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-формациях нашли широкое применение при исследовании внутреннего строения насыщенных формаций. Так, например, в монографиях [3,4,6] рассмотрен ряд приложений теории минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций в вопросах изучения насыщенных формаций с заданными внутренними свойствами. В работе [40] теория критических формаций была использована для получения внешней характеризации конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины. В.Н. Рыжик и А.Н. Скиба использовали описание минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций при решении проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [8] о факторизациях ω-насыщенных формаций [61].

Многочисленные приложения теория $\mathfrak{H}_l$-критических формаций получила при исследованиях насыщенных формаций с заданным $\mathfrak{H}$-дефектом. Напомним, что понятие $\mathfrak{H}$-дефекта насыщенной формации впервые было введенно в работе А.Н. Скибы и Е.А. Таргонского [26]. При этом под $\mathfrak{H}$-дефектом насыщенной формации $\mathfrak{F}$ понимают длину решетки насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. В этой же работе была получена классификация насыщенных формаций с нильпотентным дефектом ≤ 2. Этот результат получил развитие в разных направлениях, поскольку нашел широкое применение в теоретических исследованиях. С одной стороны, в качестве $\mathfrak{H}$ стали рассматривать другие достаточно хорошо известные классы групп (А.Н. Скиба [27], В.В. Аниськов [28]). С другой стороны, исследовались решетки насыщенных формаций большей длины (В.Г. Сафонов [31, 32]). Кроме того, такой подход нашел широкое применение при изучении структурного строения формаций групп других типов (n-кратно насыщенные формации, тотально насыщенные формации [32] и др.). В теории частично насыщенных формаций Н.Г. Жевновой дано описание ω-насыщенных с нильпотентным дефектом 1 [29], В.Г. Сафоновым и И.Н. Сафоновой изучены ω-насыщенные формации с разрешимым дефектом ≤ 2 [30].

Заметим, что несмотря на интенсивное развитие теории критических формаций до настоящего времени оставался открытым вопрос об описании n-кратно ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, для которых длина решетки n-кратно ω-насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, не превосходит 2. Эта задача была поставлена в 1999 году в работе А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова [14, проблема 5]. Вполне естественно возникает аналогичная задача описания ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, для которых длина решетки ω-насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ не превосходит 2, где $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа.

Необходимость изучения формаций ограниченного $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта может быть обоснована практическим применением этих результатов при решении задачи классификации частично насыщенных формаций конечных групп. Формации ограниченного $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта эффективно применяются при изучении частично насыщенных формаций с дополняемой решеткой частично насыщенных подформаций. Следует отметить, что формации конечных групп с системами дополняемых подформаций впервые изучались А.Н. Скибой [62]. В дальнейшем, развивая идеи А.Н. Скибы, М.И. Эйдинов [63] и В.А. Ведерников [64] описали формации групп, все подформации которых дополняемы. Кроме того, В.А. Ведерников [64] исследовал насыщенные формации с системами дополняемых подформаций. А.Н. Скиба [65] установил, что насыщенная формация является нильпотентной тогда и только тогда, когда в ней дополняема каждая подформация вида $\mathfrak{N}_p$. Обобщая эти результаты, В.В. Аниськов и А.Н. Скиба описали насыщенные формации, у которых каждая собственная насыщенная подформация либо π-разложима, либо дополняема. В теории частично насыщенных формаций в работах Н.Г. Жевновой [66, 67] было установлено внутреннее строение ω-насыщенных формаций с дополняемыми подформациями. В частности, были описаны ω-насыщенные формации с булевой решеткой ω-насыщенных подформаций; ω-насыщенные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка всех ω-насыщенных подформаций, лежащих между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, является решеткой с дополнениями; ω-насыщынные формации с $\mathfrak{N}_p$-дополняемыми подформациями. Развивая описанные выше идеи исследования ω-насыщенных формаций, возникает естественная задача классификации ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, у которых решетка всех разрешимых ω-насыщенных подформаций, лежащих между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, является булевой.

Отмеченный выше круг открытых вопросов об ω-насыщенных формациях определяет программу и задачи изучения ω-насыщенных формаций, имеющих заданные ограничения на решетку их ω-насыщенных подформаций, реализации которой и посвящена данная диссертация.

1.2 Краткие выводы

Данная глава является вводной к диссертационной работе. Раздел 1.1 посвящен аналитическому обзору литературы по теме исследований, изложению проблем изучения частично насыщенных формаций с заданными ограничениями на решетку их подформаций. На основе проведенного анализа литературы формулируются основные задачи диссертационной работы.

ГЛАВА 2

ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО $\mathfrak{H}^\omega$-ДЕФЕКТА

В настоящей главе изучается структурное строение ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта ≤ 2, где $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа. Напомним, что формация $\mathfrak{H}$ называется формацией классического типа, если она обладает таким спутником, все неабелевы значения которого локальны.

В разделе 2.1 для произвольной формации $\mathfrak{H}$ классического типа приводится классификация ω-насыщенных формаций, имеющих $\mathfrak{H}^\omega$-дефект равный 1, т.е. дается классификация ω-насыщенных формаций, обладающих максимальной ω-насыщенной подформацией, содержащейся в классе конечных групп $\mathfrak{H}$.

В разделе 2.2 приводится ряд как известных, так и новых следствий, вытекающих из результатов раздела 2.1.

На основе результатов раздела 2.1 в разделе 2.3 описывается структурное строение приводимых ω-насыщенных формаций, имеющих $\mathfrak{H}^\omega$-дефект, равный 2.

В разделе 2.4 исследуются неприводимые ω-насыщенные формации с $\mathfrak{H}^\omega$-дефектом, равным 2. В частности, получено описание строения конечных групп, порождающих такие формации.

2.1 ω-Насыщенные формации $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта 1

Понятие $\mathfrak{H}$-дефекта насыщенной формации впервые было введено в работе А.Н.Скибы и Е.А.Таргонского [26]. При этом под $\mathfrak{H}$-дефектом насыщенной формации $\mathfrak{F}$ понимают длину решетки насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. В этой же работе была получена классификация насыщенных формаций с нильпотентным дефектом ≤ 2.

В дальнейшем этот результат получил развитие в разных направлениях, и нашел широкое применение в теоретических исследованиях. Основной целью данного раздела является исследование ω-насыщенных формаций, имеющих $\mathfrak{H}^\omega$-дефект ≤ 2, где $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией классического типа, если она обладает спутником, все неабелевы значения которого являются насыщенными формациями.

2.1.1 Лемма [14]. *Если $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} \mathfrak{X}$ и f — минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d} \mid \ G \in \mathfrak{X})$*;*

2) $f(p) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p \in \omega$*;*

3) если $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$ *и* p *— некоторый фиксированный элемент из* ω*, то* $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$*, где* $f_1(a) = h(a)$ *для всех* $a \in (\omega \backslash \{p\}) \cup \{\omega'\}$*,* $f_1(p) = \mathrm{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$ *и, кроме того,* $f_1(p) = f(p)$*;*

4) $\mathfrak{F} = LF_\omega(g)$*, где* $g(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $g(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$*.*

2.1.2 Лемма [14]. *Пусть* f_i *— такой внутренний* ω*-локальный спутник формации* $\mathfrak{F}_i$*, что* $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$*, где* $i \in I$*. Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee^\omega \mathfrak{F}_2 = LF_\omega(f)$*, где* $f = f_1 \vee f_2$*.*

2.1.3 Лемма [52]. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *— некоторая формация классического типа,* h *— ее канонический* ω*-локальный спутник. Тогда в том и только в том случае* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* ω*-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$*, где* G *— такая монолитическая группа с цоколем* $P = G^{\mathfrak{H}}$*, что либо* $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$*, либо* $\pi \neq \varnothing$ *и выполняется одно из следующих условий:*

(1) $G = P$ *— группа простого порядка;*

(2) P *— неабелева группа и* $P = G^{h(p)}$ *для любого* $p \in \pi$*;*

(3) $G = [P]H$*, где* $P = C_G(P)$ *—* p*-группа, а* H *— такая монолитическая группа с цоколем* $Q = H^{h(p)}$*, что* $p \notin \pi(Q)$ *и либо* $\Phi(H) = 1$ *и* $H^{h(q)} \subseteq Q$*, для любого* $q \in \pi(Q)$*, либо* H *— минимальная не* $h(p)$*-группа одного из следующих типов:*

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка q^3 *простой нечетной экспоненты* q*.*

2.1.4 Лемма [14]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *—* ω*-насыщенная формация и* f *— ее* ω*-локальный спутник. Если* $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$*, то* $G \in \mathfrak{F}$*.*

2.1.5 Лемма [14]. *Если формации* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *являются* ω*-насыщенными, то формация* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *также является* ω*-насыщенной.*

2.1.6 Лемма [4, с. 41]. *Пусть* A *— монолитическая группа с неабелевым цоколем,* $\mathfrak{M}$ *— некоторая полуформация и* $A \in \mathrm{form}\mathfrak{M}$*. Тогда* $A \in \mathfrak{M}$*.*

2.1.7 Лемма [4, с. 26]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— произвольная непустая формация и пусть у каждой группы* $G \in \mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$*-корадикал* $G^{\mathfrak{F}}$ *не имеет фраттиниевых* G*-главных факторов. Тогда если* A *— монолитическая группа из* $\mathrm{form}\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{F}$*, то* $A \in \ \mathbf{H}(\mathfrak{X})$*.*

Следующая лемма является частным случаем леммы 5.2.7 [4, с. 193].

2.1.8 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{M}$*,* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *—* ω*-насыщенные формации и* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$*. Тогда* $\mid \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \mid^\omega \leq \mid \mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \mid^\omega$ *.*

2.1.9 Лемма [15]. *Решетка всех* ω*-насыщенных формаций* l^ω *модулярна.*

2.1.10 Лемма [68]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда если $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется, по крайней мере, одна минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Следствием леммы 5.2.8 [4, с. 194] является

2.1.11 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-насыщенные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t соответственно $\mathfrak{H}^\omega$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ и m, $r < \infty$, то $t \leq m + r$.*

2.1.12 Лемма [11-А]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда в формации $\mathfrak{F}$ не существует минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$.*

Доказательство. Предположим, что в $\mathfrak{F}$ существует минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация $\mathfrak{H}_2$, отличная от $\mathfrak{H}_1$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ формацию $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Так как по условию $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, то $\mathfrak{M}_1$ — максимальная ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$ и, следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}_2 \vee^\omega \mathfrak{M}_1$.

По лемме 2.1.1 формации $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2)$ и $\mathfrak{M}_1$ имеют такие минимальные внутренние ω-локальные спутники h_i $(i = 1, 2)$ и m соответственно, что

$$h_i(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(A/F_a(A)|A \in \mathfrak{H}_i), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}_i), \\ \mathfrak{H}_i, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{H}_i); \end{cases}$$

и

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}((A/F_a(A)|A \in \mathfrak{M}_1), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}_1), \\ \mathfrak{M}_1, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{M}_1). \end{cases}$$

Тогда по лемме 2.1.2 получаем, что формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник f, что $f(p) = h_i(p) \vee m(p)$ $(i = 1, 2)$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{H}_i \vee \mathfrak{M}_1 = \mathrm{form}(\mathfrak{H}_i \cup \mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{F}$.

Ввиду леммы 2.1.3 формация $\mathfrak{H}_i$ имеет вид $\mathfrak{H}_i = l^\omega \mathrm{form} G_i$ $(i = 1, 2)$, где G_i — такая монолитическая группа с цоколем $P_i = G_i^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi_i = \pi(P_i) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi_i \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) G_i — группа простого порядка p_i;

(2) P_i — неабелева группа и $P_i = G_i^{h(p)}$ для любого $p \in \pi_i$;

(3) $G_i = [P_i]H_i$, где $P_i = C_{G_i}(P_i)$ — p_i-группа, а H_i — такая монолитическая группа с цоколем $Q_i = H_i^{h(p_i)}$, что $p_i \notin \pi(Q_i)$ и либо $\Phi(H_i) = 1$ и $H_i^{h(q)} \subseteq Q_i$ для любого $q \in \pi(Q_i)$, либо H_i — минимальная не $h(p_i)$-группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка q_i^3 простой нечетной экспоненты q_i.

Пусть для группы G_2 выполнено условие (1). Тогда $\mathfrak{H}_2 = l^{\omega}\mathrm{form}G_2 = \mathfrak{N}_{p_2}$, $\mathfrak{H}_2 \nsubseteq \mathfrak{M}_1$ и $p_2 \notin \pi(\mathfrak{M}_1)$. Тогда по лемме 2.1.1 $m(p_2) = \varnothing$. Следовательно,

$$G_2/F_{p_2}(G_2) = G_2/O_{p_2}(G_2) \in f(p_2) = h_1(p_2) \vee m(p_2) = h_1(p_2) \vee \varnothing = h_1(p_2).$$

Применяя лемму 2.1.4, получаем, что группа $G_2 \in \mathfrak{H}_1$. Тогда

$$\mathfrak{H}_2 = l^{\omega}\mathrm{form}G_2 \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Так как $\mathfrak{H}_2$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{H}_1$. Т.е. в минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формации $\mathfrak{H}_1$ содержится минимальная ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть теперь группа G_2 удовлетворяет условию (2). Обозначим через $\mathfrak{R} = \mathrm{form}(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1)$. Поскольку, по лемме 2.1.5, $\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}$ — ω-насыщенная формация и $\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}$.

Но $G_2 \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G_2 \in \mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{R}$. Значит, $\mathfrak{R}$-корадикал группы G_2 содержится в $\mathfrak{N}_{\omega}$. Пусть $G_2^{\mathfrak{R}} \neq 1$. Так как $\mathfrak{R}$-корадикал — нормальная в G_2 подгруппа и P_2 — единственная минимальная нормальная подгруппа в G_2, то верно включение $P_2 \subseteq G_2^{\mathfrak{R}}$. Тогда получаем, что P_2 — неабелева минимальная нормальная подгруппа в G_2, содержится в нильпотентной подгруппе $G_2^{\mathfrak{R}}$ группы G_2. Противоречие.

Следовательно, $G_2^{\mathfrak{R}} = 1$. Поэтому $G_2 \in \mathfrak{R}$. Применяя лемму 2.1.6, имеем $G_2 \in \mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{M}_1$. Тогда, так как $G_2 \notin \mathfrak{M}_1$, то $G_2 \in \mathfrak{H}_1$. Поэтому $\mathfrak{H}_2 = l^{\omega}\mathrm{form}G_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$. Т.е. в минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формации $\mathfrak{H}_1$ содержится минимальная ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть для группы G_2 выполнено условие (3), $\Phi(H_2) = 1$ и $H_2^{h(q)} \subseteq Q_2$, для любого $q \in \pi(Q_2)$. Заметим, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$. Кроме того, $G_2/P_2 \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1$ и $G_2 \notin \mathfrak{M}_1$. Поэтому $P_2 = G_2^{\mathfrak{M}_1}$. По условию $P_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}$. Значит, $G_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$.

Ввиду леммы 2.1.5 формация $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$ является ω-насыщенной формацией. Так как $\mathfrak{H}_2 = l^{\omega}\mathrm{form}G_2$, то $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$. Но тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$, так как $\mathfrak{F}$ — наименьшая ω-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H}_2$.

Следовательно, $G_1 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{M}_1$. Поскольку, $G_1/P_1 \in \mathfrak{M}_1$ и $G_1 \notin \mathfrak{M}_1$, то $P_1 = G_1^{\mathfrak{M}_1} \in \mathfrak{N}_{p_2}$, т.е. P_1 является p_2-группой и $p_1 = p_2 = p$.

Так как $G_2 \in \mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{M}_1$, то

$$H_2 \simeq G_2/P_2 = G_2/F_{p_2}(G_2) \in f(p) = m(p) \vee h_1(p).$$

Заметим также, что

$$h_1(p) = \mathrm{form}(G_1/F_p(G_1)) = \mathrm{form}(G_1/P_1) = \mathrm{form}(H_1).$$

Кроме этого, $H_2 \notin m(p) \subseteq h(p)$. Таким образом,

$$H_2 \in \mathrm{form}(m(p) \cup \{H_1\}) \backslash h(p).$$

По условию H_2 имеет цоколь $Q_2 = H_2^{h(p)} \subseteq \Phi(H_2)$. Тогда для любой группы A из $m(p) \cup \{H_1\}$ подгруппа $A^{h(p)}$ не содержит фраттиниевых A-главных факторов. По лемме 2.1.7 получаем, что $H_2 \in \mathbf{H}(\{H_1\} \cup m(p))$. Если $H_2 \simeq L/N$, для некоторой группы $L \in m(p)$, то $H_2 \in \mathfrak{H}$. Противоречие.

Таким образом, H_2 не является гомоморфным образом группы из $m(p)$. Поскольку $H_2 \notin \mathfrak{H}$ и $H_1/Q_1 \in m(p) \subseteq h(p)$, то $H_2 \simeq H_1$.

Но тогда $G_2/O_p(G_2) = G_2/P_2 \simeq H_2 \simeq H_1 \simeq G_1/F_p(G_1) \in h_1(p) \subseteq \mathfrak{H}_1$. Применяя лемму 2.1.4, получаем, что $G_2 \in \mathfrak{H}_1$. Из того, что $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация, получаем $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть теперь $\Phi(H_2) \neq 1$. Так как $\mathfrak{H}$ — формация классического типа, то она обладает таким спутником x_2, все неабелевы значения которого локальны. Пусть $x_1(a) = x_2(a) \cap \mathfrak{H}$ $(a \in \omega \cap \{\omega'\})$ — внутренний локальный спутник формации $\mathfrak{H}$-критических. Если значение $x_1(p)$ — насыщенная формация, то $\mathfrak{N}_p x_1(p) = h(p)$ локально. Но тогда, так как $H_2/Q_2 \in h(p)$, то $H_2 \in h(p)$. Противоречие.

Значит, значение $x_1(p)$ — абелева формация, следовательно, $m(p)$ также является абелевой формацией. Кроме того, заметим, что H_2 является минимальной не $x_1(p)$-группой. Поэтому Q_2 — абелева q-группа для некоторого простого числа q, т.е. $Q_2 = H_2^{x_1(p)} \subseteq \mathfrak{N}_q$. Но тогда

$$f(p) = h_2(p) \vee m(p) \subseteq \mathfrak{N}_q x_1(p) \text{ и } G_1/P_1 \simeq H_1 \in f(p) \subseteq \mathfrak{N}_q h(p).$$

Таким образом, Q_1 — также абелева q-группа.

Предположим, что H_2 — циклическая примарная группа. Так как Q_2 — абелева q-группа, то $f(p) = h_2(p) \vee m(p) = \mathrm{form} H_2 \vee m(p)$ является абелевой формацией как объединение двух абелевых формаций. С другой стороны,

$$f(p) = h_1(p) \vee m(p) = \mathrm{form} H_1 \vee m(p).$$

Следовательно, H_1 — также циклическая q-группа, т.е. H_1 удовлетворяет условию а).

Пусть для определенности $|H_1| = q^\alpha$, $|H_2| = q^\beta$, где $\alpha \leq \beta$. Тогда, ввиду рассуждений доказательства теоремы 2.2.10 [4], получаем $\mathrm{form} H_1 \subseteq \mathrm{form} H_2$. Опять применяя лемму 2.1.4, получаем, что группа $G_2 \in \mathfrak{H}_1$. Поэтому

$\mathfrak{H}_2 = l^\omega \mathrm{form} G_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$. Т.е. в минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формации $\mathfrak{H}_1$ содержится минимальная ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Пусть H_2 — группа кватернионов порядка 8. Тогда $q = 2$ и

$$f(p) = h_2(p) \vee m(p) = \mathrm{form} H_2 \vee m(p) \subseteq \mathfrak{N}_2 h(p).$$

Но $H_1 \in f(p)$, следовательно, $H_1 \in \mathfrak{N}_2 x_1(p)$. Так как $H_1 \notin x_1(p)$, то $q_1 = 2$ и H_1 также является группой кватернионов порядка 8. Но тогда $H_2 \in h_1(p)$, а следовательно, ввиду леммы 2.1.4, группа $G_2 \in \mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2 = l^\omega \mathrm{form} G_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$. Т.е. в минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формации $\mathfrak{H}_1$ содержится минимальная ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Допустим, что H_2 — неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. Тогда $f(p) = h_2(p) \vee m(p) = \mathrm{form} H_2 \vee m(p) \subseteq \mathfrak{N}_q x_1(p)$ и $f(p)$ — неабелева формация, как объединение неабелевой формации $\mathrm{form} H_2$ и абелевой формации $m(p)$. С другой стороны,

$$f(p) = h_1(p) \vee m(p) = \mathrm{form} H_1 \vee m(p).$$

Так как $\mathrm{form} H_1$ не может быть абелевой формацией (иначе $f(p)$ — абелева) и так как $H_1 \in f(p) \subseteq \mathfrak{N}_q x_1(p)$, то Q_1 — абелева q-группа и H_1 — также неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. Тогда, используя рассуждения доказательства теоремы 2.2.10 [4], получаем, что $\mathrm{form} H_1 = \mathrm{form} H_2$. Следовательно $H_2 \in h_1(p)$, группа $G_2 \in \mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2 = l^\omega \mathrm{form} G_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$. Т.е. в минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формации $\mathfrak{H}_1$ содержится минимальная ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}_2$. Противоречие.

Для завершения доказательства осталось лишь рассмотреть случай, когда $\pi_2 = \varnothing$, т.е. P_2 — ω'-группа. Так как $\mathfrak{H}$ — насыщенная формация и $P_2 = G^{\mathfrak{H}}$, то $P_2 \nsubseteq \Phi(G_2)$. Заметим, что если P_2 — неабелева группа, то доказательство аналогично доказательству, когда $\pi_2 = \varnothing$ и P_2 — неабелева группа. Значит, P_2 — абелева p_2-группа.

Рассмотрим формацию $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{H}_2$. Поскольку формация $\mathfrak{H}_1$ содержится в формации $\mathfrak{H}^*$ и $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{H}_1$ равен 1, то по лемме 2.1.11 получаем, что $|\mathfrak{H}^* : \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{H}|^\omega \geq 1$. С другой стороны, так как $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, то по лемме 2.1.8, $|\mathfrak{H}^* : \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{H}|^\omega \leq 1$. Значит, $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{H}^*$ равен 1. Поэтому в $\mathfrak{H}^*$ существует максимальная ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{L}$. Понятно, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{H}$. Тогда

$$\mathfrak{H}^* = \mathfrak{L} \vee^\omega \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{L} \vee^\omega \mathfrak{H}_2.$$

Поскольку P_2 является абелевой p_2-группой и единственной минимальной нормальной подгруппой в G_2 такой, что $G_2/P_2 \in \mathfrak{L} = \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{H}$, то

$G_2^{\mathfrak{L}} = P_2$. Это означает, что $G_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Кроме того, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. А так как по лемме 2.1.5 формация $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ является ω-насыщенной формацией и $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{L} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_2$, то $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Поэтому $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{L} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ и группа $G_1 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$.

Таким образом, получаем, что P_1 является p_2-группой.

Рассмотрим решетку $\mathfrak{H}^* \vee^{\omega} \mathfrak{H}/^{\omega}\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 2.1.9 выполняется изоморфизм $\mathfrak{H}^* \vee^{\omega} \mathfrak{H}/^{\omega}\mathfrak{H} \simeq \mathfrak{H}^*/^{\omega}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}^*/^{\omega}\mathfrak{L}$.

Значит, $\mathfrak{H}$ является максимальной ω-насыщенной подформацией в $\mathfrak{H}^* \vee^{\omega} \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^* \vee^{\omega} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_2 \vee^{\omega} \mathfrak{H}$. Значит, $G_1 \in \mathfrak{H}_2 \vee^{\omega} \mathfrak{H}$. Следовательно, $G_1 \in l^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{H}_2 \cup \mathfrak{H}) = l^{\omega}\mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}\mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{H})$.

Так как P_1 — p_2-группа и $p_2 \in \{\omega'\}$, то $G_1 \in \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{H})$. Но $G_1 \notin \mathfrak{H}$. Значит, $G_1 \in \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{H}) \backslash \mathfrak{H}$.

Поскольку для любой группы A из $\{G_2\} \cup \mathfrak{H}$, подгруппа $A^{\mathfrak{H}}$ не содержит фраттиниевых A-главных факторов, то по лемме 2.1.7 получаем, что $G_1 \in \mathbf{H}(\{G_2\} \cup \mathfrak{H})$.

Так как $G_1 \notin \mathfrak{H}$ и $G_2/P_2 \in \mathfrak{H}$, то $G_1 \simeq G_2$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$. Снова получили противоречие.

Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$. Лемма доказана.

2.1.13 Теорема [5-А,11-А,19-А]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — некоторая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Доказательство. **Необходимость**. Пусть $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Так как $\mathfrak{F}$ не является $\mathfrak{H}$-формацией, то по лемме 2.1.10 в формацию $\mathfrak{F}$ входит некоторая минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{H}_1$.

По условию $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ — максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}_1$ равны соответственно t, m и r. Поскольку $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация, то $m = 0$. Так как $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация, то ее $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект r равен 1. В силу леммы 2.1.11 для $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта формации $\mathfrak{F}$ имеет место неравенство $t \leq m + r = 0 + 1 = 1$. Если $t = 0$, то $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}$-формация, что противоречит тому, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|^{\omega} = 1$.

Докажем теперь справедливость утверждения 1) второй части теоремы. Так как $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_1$ — максимальная ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{H}_1$, то, в силу леммы 2.1.9, имеет место решеточный изоморфизм

$$(((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1)/^{\omega}((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}) \simeq \mathfrak{H}_1/^{\omega}\mathfrak{H}_1 \cap ((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}) =$$

$$= \mathfrak{H}_1/^{\omega}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}_1/^{\omega}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_1.$$

Тогда, поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то всякая ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_1) \vee^{\omega} \mathfrak{M}$.

Докажем утверждение 2). Используя лемму 2.1.12, получаем, что в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда в силу уже доказанного и леммы 2.1.10 получаем, что $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, применяя лемму 2.1.9, имеем

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}).$$

Теорема доказана.

2.2 Некоторые следствия теоремы 2.1.13

Приведем некоторые следствия теоремы 2.1.13. Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 2.1.13 вытекает

2.2.1 Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}^p$-дефект p-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^p \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — p-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная p-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая p-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^p (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая p-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee^p (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Если ω равно множеству всех простых чисел $\mathbb{P}$, то из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.2 Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Тогда и только тогда насыщенный $\mathfrak{H}$-дефект насыщенной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Так как всякая 2-кратно насыщенная формация является формацией классического типа, то из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.3 Следствие [4-A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая 2-кратно насыщенная формация. Тогда и только тогда ω-насыщенный $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ — минимальная насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация. Причем выполняются следующие условия:*

1) всякая ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация входит в $\mathfrak{M} \vee^\omega (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Если $\mathfrak{H}$ — некоторая 2-кратно насыщенная формация, а ω равно множеству всех простых чисел, тогда из теоремы 2.1.13 вытекает

2.2.4 Следствие [28]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая 2-кратно насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ — минимальная насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация. Причем выполняются следующие условия:*

1) всякая насыщенная не входящая в $\mathfrak{H}$ подформация $\mathfrak{F}_1$ формации $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая насыщенная входящая в $\mathfrak{H}$ подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в формацию $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Заметим, что многие хорошо известные формации являются формациями классического типа. Например, формации всех нильпотентных, π-нильпотентных, разрешимых, π-разрешимых, π-специальных, π-замкнутых, π-разложимых групп, где π — некоторое множество простых чисел. Поэтому из теоремы 2.1.13 можно получить в качестве следствий ряд как известных так и новых результатов теории насыщенных и частично насыщенных формаций. Например, пусть $\mathfrak{H}$ — формация π-нильпотентных групп, где π — некоторое множество простых чисел. Тогда из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.5 Следствие [1-A, 16-A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — формация всех π-нильпотентных групп, и пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае π-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная π-нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная ω-насыщенная не π-нильпотентная формация, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная π-нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^\omega (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая ω-насыщенная не π-нильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ — формация нильпотентных групп, тогда из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.6 Следствие [29]. *В том и только в том случае ω-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную ω-насыщенную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная ω-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ — формация нильпотентных групп, а $\omega = \{p\}$, тогда из теоремы 2.1.13 вытекает

2.2.7 Следствие [10]. *В том и только в том случае p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет нильпотентную максимальную p-насыщенную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{p} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{p} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^{p} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ — формация нильпотентных групп, а ω равно множеству всех простых чисел $\mathbb{P}$, тогда из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.8 Следствие [26]. *В точности тогда нильпотентный дефект насыщенной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{l} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_{l} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_{l} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если $\mathfrak{H}$ — формация π-разложимых групп (где π — некоторое множество простых чисел), тогда из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.9 Следствие [3-А,13-А]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае π-разложимый ω-насыщенный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная π-разложимая подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная* *не π-разложимая подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная π-разложимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая ω-насыщенная не π-разложимая подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Если в качестве формации $\mathfrak{H}$ рассмотреть формацию p-разложимых групп, а в качестве ω взять множество всех простых чисел $\mathbb{P}$, то из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.10 Следствие [27]. *В точности тогда p-разложимый дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — насыщенная p-разложимая подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная насыщенная не p-разложимая подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая насыщенная p-разложимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая насыщенная не p-разложимая подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Если $\mathfrak{H}$ — формация π-специальных групп, то из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.11 Следствие [2-А, 17-А]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае ω-насыщенный π-специальный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная π-специальная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не π-специальная подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная π-специальная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая ω-насыщенная не π-специальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ — формация разрешимых групп, тогда из теоремы 2.1.13 получаем

2.2.12 Следствие [30]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда разрешимый дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1 в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная разрешимая формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная ω-насыщенная неразрешимая формация, при этом:*

1) всякая ω-насыщенная разрешимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S})$;

2) всякая ω-насыщенная неразрешимая подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{S})$.

Если $\mathfrak{H}$ — формация π-замкнутых групп, то из теоремы 2.1.13 вытекает

2.2.13 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае ω-насыщенный π-замкнутый дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная π-*

замкнутая подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не π-замкнутая подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:

1) всякая ω-насыщенная π-замкнутая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$;

2) всякая ω-насыщенная не π-замкнутая подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$.

2.3 Приводимые ω-насыщенные формации $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 2

Целью данного подраздела является описание внутреннего строения приводимых ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 2, где $\mathfrak{H}$ — произвольная формация классического типа.

2.3.1 Лемма [12-А]. *Пусть $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$ — однопорожденная ω-насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{F}))$, где $\Omega(\mathfrak{F})$ — множество всех неприводимых ω-насыщенных подформаций однопорожденной формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть G — группа минимального порядка, для которой утверждение леммы не верно. Обозначим через $\mathfrak{B}$ ω-насыщенную формацию, порожденную множеством $\Omega(\mathfrak{F})$, где $\Omega(\mathfrak{F})$ — множество всех неприводимых ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{B} = l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{F})) \subset \mathfrak{F}$. Заметим также, что $\mathfrak{F}$ является приводимой ω-насыщенной формацией, так как иначе $\mathfrak{F} \in \Omega(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно.

Выберем в $\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{B}$ группу минимального порядка A. Пусть $\mathfrak{X} = l^{\omega}\mathrm{form}A$. Тогда если для группы A утверждение верно, то $\mathfrak{X} = l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{X}))$. Но $\Omega(\mathfrak{X}) \subseteq \Omega(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{B}$. Значит, $\mathfrak{X} \subseteq l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{F})) = \mathfrak{B}$. Противоречие. Поэтому для группы A утверждение неверно. Значит, так как A и $G \in \mathfrak{F}\backslash\mathfrak{B}$, то

$$\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}A = l^{\omega}\mathrm{form}G.$$

Но тогда для любой группы $B \in \mathfrak{F}\backslash\mathfrak{B}$ имеет место равенство $l^{\omega}\mathrm{form}B = \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая собственная ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{L} \nsubseteq \mathfrak{F}$. Тогда существует группа $D \in \mathfrak{L}\backslash\mathfrak{B}$, причем $l^{\omega}\mathrm{form}D = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{B}$. Но тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{B}^{\omega}$-критической, т.е. неприводимой ω-насыщенной формацией. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

2.3.2 Теорема [6-А, 12-А]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — приводимая ω-насыщенная формация. В точности тогда $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект приводимой ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ равен* 2, *когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные ω-насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ — неприводимая ω-насыщенная формация с $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефектом 2.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, $\mathfrak{K}$ — такая максимальная ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{K}$ равен 1. По теореме 2.1.13 формация $\mathfrak{K}$ представима в виде $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-формация, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Если в $\mathfrak{F}$ имеется еще одна минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{H}_2$, отличная от $\mathfrak{H}_1$, то $\mathfrak{H}_2 \not\subseteq \mathfrak{K}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{H}_2 \vee^{\omega} \mathfrak{M}$ и выполнено условие 1).

Пусть теперь в формации $\mathfrak{F}$ нет отличных от $\mathfrak{H}_1$ минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций.

Ввиду леммы 2.3.1 справедливо равенство

$$\mathfrak{F} = \vee^{\omega} l^{\omega}\mathrm{form}(G | G \in \mathfrak{F}) =$$

$$= \vee^{\omega} l^{\omega}\mathrm{form}(G_i | i \in I) = \vee^{\omega}_{i \in I} l^{\omega}\mathrm{form} G_i = \vee^{\omega}_{i \in I} l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{F}_i)),$$

где $\Omega(\mathfrak{F}_i)$ — множество всех неприводимых ω-насыщенных подформаций однопорожденной формации $\mathfrak{F}_i = l^{\omega}\mathrm{form} G_i$.

Если для всех $i \in I$ формация $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{K}$, то получаем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{K}$. Противоречие. Следовательно, найдется некоторое $i \in I$, такое, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq \mathfrak{K}$. Так как $\mathfrak{K}$ — максимальная ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{K} \vee^{\omega} \mathfrak{F}_i$. По лемме 2.1.8 получаем, что $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}_i$ не больше 2.

Допустим, что $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}_i$ не больше 1. Тогда так как в $\mathfrak{F}$ нет отличных от $\mathfrak{H}_1$ минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, получаем, что либо $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_i$, либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}$. Но тогда $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{K}$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}_{\mathrm{i}}$ равен 2.

Заметим, что, так как в $\mathfrak{F}$ нет отличных от $\mathfrak{H}_1$ минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i \vee^{\omega} \mathfrak{K} = \mathfrak{F}_i \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{M}) = \mathfrak{F}_i \vee^{\omega} \mathfrak{M},$$

т.е. формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2 теоремы.

Достаточность. Пусть выполнено условие 1) теоремы. Тогда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{H}_2,$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные ω-насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации. Тогда, применяя лемму 2.1.11, получаем, что $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ меньше или равен 2.

Предположим, что $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ строго меньше 2. В этом случае, ввиду леммы 2.1.8, получаем, что $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{H}_2$ строго меньше 2. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\omega \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ — неприводимая ω-насыщенная формация с $\mathfrak{H}^\omega$-дефектом 2. Рассуждая аналогично случаю, рассмотренному выше, и снова применяя леммы 2.1.8 и 2.1.11, опять получаем, что $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2. Теорема доказана.

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 2.3.2 вытекает

2.3.3 Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — приводимая ω-насыщенная формация. В точности тогда $\mathfrak{H}$-дефект приводимой ω-насыщенной формации $\mathfrak{H}$ равен 2, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^p \mathfrak{H}_1 \vee^p \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая p-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные p-насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^p \mathfrak{H}_3$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая p-насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}_3$, а $\mathfrak{H}_3$ — неприводимая p-насыщенная формация с $\mathfrak{H}^p$-дефектом 2.

Если ω равно множеству всех простых чисел $\mathbb{P}$, то из теоремы 2.3.2 получаем

2.3.4 Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — приводимая насыщенная формация. В точности тогда $\mathfrak{H}$-дефект приводимой насыщенной формации $\mathfrak{H}$ равен 2, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_3$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}_3$, а $\mathfrak{H}_3$ — неприводимая насыщенная формация с $\mathfrak{H}^\omega$-дефектом 2.

Из теоремы 2.3.2 следует ряд других как известных, так и новых результатов, если в качестве $\mathfrak{H}$ рассматривать произвольные формации классического типа. В частности, например, если $\mathfrak{H}$ — произвольная 2-кратно насыщенная формация, $\omega = \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$, то из теоремы 2.3.2 вытекает

2.3.5 Следствие [28]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная 2-кратно насыщенная формация и $\mathfrak{F}$ такая приводимая насыщенная формация, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$. В точности тогда $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая насыщенная подформация формации $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-

формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_3$, *где* $\mathfrak{M}$ *— некоторая насыщенная подформация формации* $\mathfrak{H}$, *а* $\mathfrak{H}_3$ *— неприводимая насыщенная формация с* $\mathfrak{H}$*-дефектом 2.*

Если в качестве ω взять множество всех простых чисел, а $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$, то получаем

2.3.6 Следствие [26]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— приводимая насыщенная формация. В точности тогда нильпотентный дефект формации* $\mathfrak{F}$ *равен* 2, *когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$, *где* $\mathfrak{M}$ *— некоторая насыщенная нильпотентная подформация, а* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_2$ *— различные минимальные насыщенные ненильпотентные формации;*

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_3$, *где* $\mathfrak{M}$ *— некоторая насыщенная нильпотентная подформация, а* $\mathfrak{H}_3$ *— неприводимая насыщенная формация с нильпотентным дефектом 2.*

Если $\omega = \mathbb{P}$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ — p-разложимая формация, тогда из теоремы 2.3.2 вытекает

2.3.7 Следствие [27]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— разрешимая приводимая насыщенная формация. В точности тогда p-разложимый дефект формации* $\mathfrak{F}$ *равен* 2, *когда* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$, *где* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, *а* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_2$ *— различные минимальные насыщенные не p-разложимые формации;*

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, *а* $\mathfrak{H}$ *— неприводимая насыщенная формация, p-разложимый дефект которой равен 2.*

2.4 Неприводимые ω-насыщенные формации $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта 2

Напомним, что ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется неприводимой, если она не может быть представлена в виде решеточного объединения некоторых своих собственных ω-насыщенных подформаций в решетке l^ω.

Группа G называется критической, если G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{M}$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$.

Критическая группа $G \in \mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}$-базисной, если у формации, ею порожденной, имеется лишь единственная максимальная подформация $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

2.4.1 Лемма [69]. *Пусть* Θ *— такая полная решетка формаций, что* $\Theta^\omega \subseteq \Theta$. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *—* ω*-насыщенная формация с каноническим* ω*-локальным спутником* H, $\mathfrak{F}$ *—* ω*-насыщенная формация с минимальным* ω*-локальным* Θ *-значным спутником* f. *Тогда в том и только в том случае* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathfrak{H}_{\Theta^\omega}$*-критическая формация, когда* $\mathfrak{F} = \Theta^\omega \mathrm{form} G$, *где* G *— такая* *монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, $\Phi(G) = 1$ и $f(p)$ — $H(p)_\Theta$-критическая формация для всех $p \in \pi$, либо $\pi = \varnothing$ и $f(\omega')$ — $\mathfrak{H}_\Theta$-критическая формация.*

2.4.2 Лемма [21]. *Пусть G — монолитическая группа с неабелевым цоколем R. Тогда если простое число p делит порядок группы R, то $F_p(G) = 1$.*

2.4.3 Лемма [14]. *Пусть $\mathfrak{F}_1 = LF_\omega(F_1)$ и $\mathfrak{F}_2 = LF_\omega(F_2)$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $F_1 \leq F_2$.*

2.4.4 Теорема [6-А, 12-А]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неприводимая ω-насыщенная формация, $\mathfrak{M}$ — ее максимальная ω-насыщенная подформация, $\dot{M}$ — канонический ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа. Пусть $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, тогда $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{M}}$, что либо $\pi(P) \cap \omega = \varnothing$, G — $\mathfrak{M}$-базисная группа и $l^\omega \mathrm{form}(G/P)$ — ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта 1, либо $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$ и выполняется одно из условий:*

1) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ — p-группа, H — $\dot{M}(p)$-базисная группа и $l^\omega \mathrm{form} H$ имеет $\mathfrak{H}^\omega$-дефект ≤ 1;

2) P — неабелева группа, G — $\dot{M}(p)$-базисная группа для любого $p \in \pi(P) \cap \omega$ и $l^\omega \mathrm{form} G/P$ — ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта 1.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа с каноническим ω-локальным спутником h, $\mathfrak{F}$ — неприводимая ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта 2, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$ с каноническим ω-локальным спутником $\dot{M}$. Тогда $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Кроме того, $\mathfrak{F}$ является минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{M}$-формацией.

По лемме 2.1.1 формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ имеют такие минимальные внутренние ω-локальные спутники f и m соответственно, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(A/F_a(A) | A \in \mathfrak{F}), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}), \\ \mathfrak{F}, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{F}); \end{cases}$$

и

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}((A/F_a(A) | A \in \mathfrak{M}), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}), \\ \mathfrak{M}, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

В силу замечания 2 [14] справедливо равенство $\dot{M}(p) = \mathfrak{N}_p m(p)$, для всех $p \in \omega$.

Применяя лемму 2.4.1, получаем, что $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{M}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, $\Phi(G) = 1$ и $f(p)$ — $\mathfrak{N}_p m(p)$-критическая формация для всех $p \in \pi$, либо $\pi = \varnothing$ и $f(\omega')$ — $\mathfrak{M}$-критическая формация.

Заметим также, что по теореме 2.1.13 имеем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee^\omega \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$.

По лемме 2.1.1 формации $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{M}_1$ имеют такие минимальные внутренние ω-локальные спутники k и m_1 соответственно, что

$$k(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(A/F_a(A) | A \in \mathfrak{K}), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{K}), \\ \mathfrak{K}, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{K}); \end{cases}$$

и

$$m_1(a) = \begin{cases} \mathrm{form}((A/F_a(A) | A \in \mathfrak{M}_1), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}_1), \\ \mathfrak{M}_1, & \text{если } a = \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{M}_1). \end{cases}$$

Ввиду леммы 2.1.2 справедливо равенство $m = m_1 \vee k$.

В силу леммы 2.1.3 имеем $\mathfrak{M}_1 = l^\omega \mathrm{form} M$, где M — такая монолитическая группа с цоколем $L = M^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(L) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) $M = L$ — группа простого порядка;

(2) L — неабелева группа и $L = M^{h(l)}$ для любого $l \in \pi$;

(3) $M = [L]N$, где $L = C_M(L)$ — l-группа, а N — такая монолитическая группа с цоколем $Q = N^{h(l)}$, что $l \notin \pi(Q)$ и либо $\Phi(N) = 1$ и $N^{h(q)} \subseteq Q$ для любого $q \in \pi(Q)$, либо N — минимальная не $h(l)$-группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.

Пусть $\pi \neq \varnothing$, $p \in \pi$. Допустим, что P — неабелев цоколь группы G. Тогда по лемме 2.4.2 справедливо равенство $F_p(G) = 1$ и $f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)) = \mathrm{form} G$.

Пусть для формации $\mathfrak{M}_1$ выполнено условие (1). Тогда если $p \neq l$, то

$$m(p) = m_1(p) \vee k(p) = k(p)$$

и $f(p) = \mathrm{form} G$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p k(p)$-формация для любого $p \in \pi$. Значит, любая собственная подформация из $f(p)$ содержится в $\mathfrak{N}_p k(p)$. Так как $m(p) \subseteq f(p)$, то получаем $m(p) \subseteq \mathfrak{N}_p k(p)$. Противоречие. Поэтому $p = l$.

Но тогда опять получаем, что

$$m(p) = m_1(p) \vee k(p) = \mathrm{form}(M/F_p(M)) \vee k(p) =$$

$$= \mathrm{form}(M/M) \vee k(p) = (1) \vee k(p) = k(p)$$

и в силу того, что $f(p) = \mathrm{form}G$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p k(p)$-формация, получаем $m(p) \subseteq \mathfrak{N}_p k(p)$. Противоречие. Следовательно, данный случай невозможен.

Пусть для формации $\mathfrak{M}_1$ выполнено условие (2). Тогда

$$m(p) = m_1(p) \vee k(p) = \mathrm{form}(M/F_p(M)) \vee k(p) = \mathrm{form}(M) \vee k(p).$$

Покажем, что $\pi(P) \cap \omega \subseteq \pi(L) \cap \omega$. Предположим, что существует $r \in \omega \cap (\pi(P) \backslash \pi(L))$. Тогда $m(r) = m_1(r) \vee^\omega k(r) = \varnothing \vee^\omega k(r) = k(r)$. Значит, $f(r) = \mathrm{form}G$ — минимальная не $\mathfrak{N}_r k(r)$-формация. Значит, любая собственная подформация из $f(r)$ содержится в $\mathfrak{N}_r k(r)$. Так как $m(r) \subseteq f(r)$, то получаем $m(r) \subseteq \mathfrak{N}_r k(r) \subseteq h(r)$. Полученное противоречие показывает, что $\pi(P) \cap \omega \subseteq \pi(L) \cap \omega$.

Используя лемму 2.1.8 и теорему 2.1.13, можно показать, что G — $\dot{M}(p)$-базисная группа для любого $p \in \pi(P) \cap \omega$ и $l^\omega \mathrm{form}G/P$ — ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта 1. Поэтому G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Случаи, когда формация $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяет условию (3) и когда $\pi = \varnothing$, рассматриваются аналогично.

Пусть теперь P — абелева p-группа, $p \in \omega$. Тогда, поскольку $\mathfrak{M}$ — ω-насыщенная формация и $p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$, то $P \not\subseteq \Phi(G)$. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Поэтому $P = C_G(P) = O_p(G)$ и $G = [P]H$ для некоторой максимальной подгруппы группы G. Заметим, что $H \notin \dot{M}(p)$, так как иначе $H \simeq G/O_p(G) \in \dot{M}(p)$ и по лемме 2.1.6 имеем $G \in \mathfrak{M}$. Противоречие.

Так как $\mathfrak{F}$ — неприводимая ω-насыщенная формация, а $\mathfrak{M}$ — ее максимальная ω-насыщенная подформация, то любая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{M}$. Ввиду леммы 2.4.3, получаем, что любая подформация из $\mathrm{form}H$ содержится в $\dot{M}(p)$. Значит, H является $\dot{M}(p)$-базисной группой. А поскольку P является $\mathfrak{M}$-корадикалом группы G, то $H \simeq G/P$ принадлежит формации $\mathfrak{M}$. Следовательно, формация $l^\omega \mathrm{form}H$ имеет $\mathfrak{H}^\omega$-дефект ≤ 1. Таким образом, получаем, что группа G удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь $\pi = \varnothing$. Тогда ω-насыщенная формация $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}) = \mathrm{form}G$ является $\mathfrak{M}$-критической, а G — $\mathfrak{M}$-базисная группа. Если предположить, что $G/P \in \mathfrak{H}$, то формация $\mathfrak{F}$, ввиду леммы 2.1.3, является минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией. Поэтому $\mathfrak{H}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Значит, $G/P \notin \mathfrak{H}$. Так как

$G/P \in \mathfrak{M}$, то $l^\omega\mathrm{form}(G/P)$ — ω-насыщенная формация $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта 1, и группа G удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то из теоремы 2.4.4 вытекает

2.4.5 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неприводимая насыщенная формация, $\mathfrak{M}$ — ее максимальная насыщенная подформация, $\dot{M}$ — канонический локальный спутник формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа. Пусть $\mathfrak{H}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, тогда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{M}}$, что выполняется одно из условий:*

1) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ — p-группа, H — $\dot{M}(p)$-базисная группа и $l\mathrm{form}H$ имеет $\mathfrak{H}$-дефект ≤ 1;

2) P — неабелева группа, G — $\dot{M}(p)$-базисная группа для любого $p \in \pi(P)$ и $l\mathrm{form}G/P$ — насыщенная формация $\mathfrak{H}$-дефекта 1.

2.5 Краткие выводы

В данной главе изучено структурное строение частично насыщенных формаций $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта ≤ 2, где $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа.

В разделе 2.1 для произвольной формации $\mathfrak{H}$ классического типа получена классификация ω-насыщенных формаций, имеющих $\mathfrak{H}^\omega$-дефект, равный 1, т.е. дана классификация ω-насыщенных формаций, обладающих максимальной ω-насыщенной подформацией, содержащейся в классе конечных групп $\mathfrak{H}$.

В разделе 2.2 приводится ряд как известных, так и новых фактов, вытекающих из теоремы 2.1.13.

На основе результатов раздела 2.1 в разделе 2.3 описывается структурное строение приводимых ω-насыщенных формаций, имеющих $\mathfrak{H}^\omega$-дефект, равный 2.

В разделе 2.4 исследуются неприводимые ω-насыщенные формации с $\mathfrak{H}^\omega$-дефектом, равным 2. В частности, получено описание строения конечных групп, порождающих такие формации.

Отметим, что применение результатов данной главы может быть полезно, например, при изучении структурного строения ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^\omega$-дефекта больше 2.

ГЛАВА 3

КРАТНО ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ $\mathfrak{N}_n^\omega$-ДЕФЕКТА ≤ 2

В работе [14] «Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп» А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в 1999 г. была поставлена проблема описания структурного строения n-кратно ω-насыщенных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2. Данная глава посвящена решению этой проблемы.

В разделе 3.1 приводится классификация конечных групп, порождающих минимальные n-кратно ω-насыщенные ненильпотентные формации. При этом под минимальной n-кратно ω-насыщенной ненильпотентной формацией понимается такая n-кратно ω-насыщенная формация, не содержащаяся в классе всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, что всякая собственная ее n-кратно ω-насыщенная подформация содержится в $\mathfrak{N}$.

В разделе 3.2 приводится классификация n-кратно ω-насыщенных формаций, обладающих максимальной n-кратно ω-насыщенной нильпотентной подформацией.

В разделе 3.3 устанавливается внутреннее решеточное строение l_n^ω-приводимых формаций $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2.

В разделе 3.4 приводится описание конечных групп, порождающих l_n^ω-неприводимые формации $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2 при $n > 1$.

3.1 Минимальные n-кратно ω-насыщенные ненильпотентные формации

Напомним, что всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно ω-насыщенной*, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями.

n-Кратно ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется *минимальной n-кратно ω-насыщенной ненильпотентной формацией* (или *$\mathfrak{N}_n^\omega$-критической*), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$, но все собственные n-кратно ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{N}$.

Для описания минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формаций нам потребуются следующие предварительные сведения.

3.1.1 Лемма [14]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $n \geq 1$, и пусть f — минимальный l_n^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/G_{\omega d} | G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p \in \omega$*;*

3) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$*, спутник* h *является* l_{n-1}^{ω}*-значным и* p *— некоторый фиксированный элемент из* ω*, то* $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$*, где* $f_1(a) = h(a)$ *для всех* $a \in (\omega \backslash \{p\}) \cup \{\omega'\}$*,* $f_1(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G|G \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(G) = 1)$ *и, кроме того,* $f_1(p) = f(p)$*;*

4) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(g)$*, где* $g(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $g(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$*.*

3.1.2 Лемма [3, с. 167]. *Пусть* A *— монолитическая группа с цоколем* P*. Тогда если* $P \not\subseteq \Phi(A)$*, то* $\mathrm{form}(A/P)$ *— единственная максимальная подформация формации* $\mathrm{form}A$*.*

Частным случаем следствия 3.23 [3, с. 36] является следующая

3.1.3 Лемма. *Пусть группа* A *обладает главным рядом подгрупп. Тогда* $A \notin \mathrm{form}(A/Soc(A))$*.*

3.1.4 Лемма [14]. *Формация* $\mathfrak{F}$ *является* n*-кратно* ω*-насыщенной* $(n \geq 1)$ *в том и только в том случае, когда для всех* $p \in \omega$ *имеет место включение* $\mathfrak{N}_p l_n^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{F}(F_p)) \subseteq \mathfrak{F}$*.*

3.1.5 Лемма [3, с. 168]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— формации, причем* $\mathfrak{H}$ *— насыщенна и* G *— группа минимального порядка из* $\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{H}$*. Тогда* G *монолитична, ее цоколь совпадает с* $G^{\mathfrak{H}}$ *и если* $G^{\mathfrak{H}}$ *—* p*-группа, то* $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = F_p(G)$*.*

3.1.6 Лемма [3, с. 171]. *Если в группе* G *имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и* $O_p(G) = \{1\}$ *(* p *— некоторое простое число), то существует точный неприводимый* $F_p[G]$*-модуль, где* F_p *— поле из* p *элементов.*

3.1.7 Лемма [70]. *В том и только в том случае формация* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* ω*-насыщенной ненильпотентной формацией, когда* $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$*, где* G *— такая монолитическая группа с цоколем* $R = G^{\mathfrak{N}}$*, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [R]Q$ *—* p*-замкнутая* pd*-группа Шмидта с* $\Phi(G) = 1$*, где* $R = O_p(G) = F_p(G)$*,* $p \in \omega$*;*

2) $R = G^{\mathfrak{N}_p}$ *— неабелева* pd*-группа для некоторого простого числа* $p \in \omega$ *и если* $|\omega \cap \pi(R)| > 1$*, то* $G = R$ *— простая группа;*

3) R *—* ω'*-группа.*

3.1.8 Лемма [14]. *Пусть* f_1 *и* f_2 *— минимальные* ω*-локальные* Θ*-значные спутники формаций* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *соответственно. Тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ *в том и только в том случае, когда* $f_1 \leq f_2$*.*

3.1.9 Лемма [7-А]. *Пусть* $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$ *(* $n \geq 1$ *), где* G *— такая монолитическая группа с неабелевым цоколем* $R = G^{\mathfrak{N}}$*, что* $G/R \in \mathfrak{N}_p$ *и* $\pi(R) \cap \omega = \{p\}$*. Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет единственную максимальную* n*-кратно* ω*-насыщенную подформацию* $\mathfrak{M}$*, причем* $\mathfrak{M} = l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R) = \mathfrak{N}_p$*.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — группа, удовлетворяющая условиям леммы.

Поскольку R — неабелева группа, то из леммы 2.4.2 получаем $F_p(G) = 1$. Понятно, что $G_{\omega d} = G$.

Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. По лемме 3.1.1 внутренний ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ имеет вид $f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)) = \mathrm{form}G$ для $p \in \omega$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$ и $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}) = \mathrm{form}(G/G) = (1)$. Ввиду леммы 3.1.2 формация $f(p)$ имеет единственную максимальную подформацию $\mathrm{form}(G/R)$. Построим ω-локальный спутник k, принимающий следующие значения $k(p) = \mathrm{form}(G/R)$, $k(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$ и $k(\omega') = (1)$.

Пусть $\mathfrak{M} = LF_\omega(k)$. Тогда $k(p) \subset f(p)$, $f(q) = k(q)$, для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$ и $k(\omega') = f(\omega')$. Применяя лемму 3.1.8, получаем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если предположить, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, тогда $G \in \mathfrak{M}$. Но из леммы 3.1.3 следует, что $G \notin k(p) = \mathrm{form}(G/R)$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ — произвольная собственная ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ и l — ее минимальный ω-локальный спутник. Тогда по лемме 2.1.2 $l \leq f$. Так как $k(q) = f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$, $k(\omega') = f(\omega')$ и $\mathrm{form}(G/R) = k(p)$ единственная максимальная подформация в $\mathrm{form}G = f(p)$, то $l \leq k$. Значит, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M} = l^\omega\mathrm{form}(G/R)$. В силу леммы 2.1.1 формация $l^\omega\mathrm{form}(G/R)$ имеет такой минимальный ω-локальный спутник m, принимающий следующие значения $m(p) = \mathrm{form}((G/R)/F_p(G/R)) = (1)$ для $p \in \omega$, $m(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$ и $m(\omega') = (1)$. Тогда $m(p) \subseteq k(p) = \mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{N}_p m(p)$, $m(q) = f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$ и $m(\omega') = f(\omega') = (1)$. Так как $m \leq k$, то $l^\omega\mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p m(p)$ — значение на p максимального внутреннего ω-локального спутника формации $l^\omega\mathrm{form}(G/R)$, то $\mathfrak{M} \subseteq l^\omega\mathrm{form}(G/R)$. Следовательно, $\mathfrak{M} = l^\omega\mathrm{form}(G/R)$.

Будем считать, что $n > 1$ и теорема верна при $n-1$. Ввиду леммы 3.1.1, внутренний $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ имеет вид $f(p) = l^\omega_{n-1}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l^\omega_{n-1}\mathrm{form}G$, $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$ и $f(\omega') = l^\omega_{n-1}\mathrm{form}(G/G_{\omega d}) = l^\omega_{n-1}\mathrm{form}(G/G) = (1)$. Так как в силу индукции лемма верна при $n-1$, то $f(p) = l_{n-1}\mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную $(n-1)$-кратно ω-насыщенную подформацию $l^\omega_{n-1}\mathrm{form}(G/R)$.

Построим ($n-1$)-кратно ω-локальный спутник m, принимающий следующие значения $m(p) = l^\omega_{n-1}\mathrm{form}(G/R)$, $m(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega\backslash\{p\}$ и $m(\omega') = (1)$. Тогда $m(p) \subset f(p)$, $m(a) = f(a)$ для любого $a \in (\omega\backslash\{p\}) \cup \{\omega'\}$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$. Пусть m_1 — минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}$. Тогда $m_1 \leq m < f$. Применяя лемму 3.1.8, получаем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, тогда $G \in \mathfrak{M}$. Значит, в силу лемм 2.4.2 и 3.1.1, получаем $G \simeq G/F_p(G) \in m(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$. Следовательно, $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G \subseteq l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$. Но по предположению индукции $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$ — максимальная подформация $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольная собственная n-кратно ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ и r — ее минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник. Тогда по лемме 3.1.8 имеем $r \leq f$. Так как $m_1(a) = f(a)$ для любого $a \in (\omega \backslash \{p\}) \cup \{\omega'\}$ и $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R) = m_1(p)$ — единственная максимальная подформация в $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G = f(p)$, то $r \leq m_1 < f$. Таким образом, снова применяя лемму 3.1.8, получаем, что $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M} = l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$. В силу леммы 3.1.1 формация $l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$ имеет такой внутренний ω-локальный спутник l, принимающий следующие значения $l(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}((G/R)/F_p(G/R)) = (1)$, $l(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \backslash \{p\}$ и $l(\omega') = (1)$. Тогда

$$l(p) \subseteq m(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{N}_p l(p), l(q) = m(q) = \varnothing$$

для любого $q \in \omega \backslash \{p\}$ и $l(\omega') = m(\omega') = (1)$. Так как $l \leq m$, то $l_{\mathfrak{N}}^{\omega}\mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p l(p)$ — значение на р максимального внутреннего ω-локального спутника формации $l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$, то $\mathfrak{M} \subseteq l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$. Следовательно, $\mathfrak{M} = l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R)$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. По условию $G/R \in \mathfrak{N}_p$. Поэтому $\mathfrak{M} = l_n^{\omega}\mathrm{form}(G/R) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Так как $p \in \omega$, то в силу леммы 3.1.4 $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$. Лемма доказана.

3.1.10 Теорема [7-А, 20-А]. *Тогда и только $\mathfrak{F}$ является минимальной n-кратно ω-насыщенной ненильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $R = G^{\mathfrak{N}}$, что либо $\pi = \pi(R) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [R]Q$ — группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $R = C_G(R)$ — абелева p-группа, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ – простое число;

2) R — неабелева pd-группа, $G/R \in \mathfrak{N}_p$, где $p \in \omega$, причем, если $|\pi| > 1$, то $n = 1$ и $G = R$ — простая неабелева группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ является минимальной n-кратно ω-насыщенной ненильпотентной формацией и пусть группа G является группой минимального порядка из $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{N}$. Тогда G — монолитическая ненильпотентная группа с цоколем $R = G^{\mathfrak{N}}$. Кроме того, в силу насыщенности формации $\mathfrak{N}$, получаем $R \not\subseteq \Phi(G)$. А поскольку $l_n^\omega \mathrm{form} G \not\subseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} G$.

Если $\pi = \pi(R) \cap \omega = \varnothing$, т.е. R — ω'-группа, то группа G, очевидно, удовлетворяет условию теоремы.

Пусть $\pi = \pi(R) \cap \omega \neq \varnothing$. Предположим, что R является абелевой группой. Тогда R — p-группа, для некоторого $p \in \omega$. Так как $R \not\subseteq \Phi(G)$, то существует максимальная в G подгруппа M, не содержащая подгруппу R и $G = RM$. Кроме того, $R \cap M$ нормальна в M и $R \cap M$ нормальна в R. А значит, $R \cap M$ нормальна и в G. Следовательно, $R \cap M = 1$, так как иначе $R \cap M$ — нормальная в G подгруппа, содержащаяся в минимальной нормальной подгруппе R, что противоречит определению подгруппы R. Тогда получаем, что $G = [R]M$ и $M \simeq G/R \in \mathfrak{N}$.

По лемме 3.1.1 формация $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник f, что $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G))$. По лемме 3.1.5 получаем, что $R = C_G(R) = F_p(G)$. Тогда

$$f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} M.$$

Так как $M \in \mathfrak{N}$, то, для любого $r \in \pi(M) \backslash p$ имеем $Z_r \in l^\omega \mathrm{form} M$, где Z_r — группа простого порядка r.

Поскольку $O_p(Z_r) = 1$, то в силу леммы 3.1.6 существует точный неприводимый $F_p[Z_r]$ -модуль V. Пусть $F = [V]Z_r$. Тогда F является группой Шмидта с $\Phi(F) = 1$. По лемме 2.1.4 $F \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{L} = l_n^\omega \mathrm{form} F \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $Z_r \simeq F/V = F/F_p(F) \in N(p) = \mathfrak{N}_p$, где $N(p)$ — канонический спутник формации $\mathfrak{N}$, т.е. $Z_r \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} = l_n^\omega \mathrm{form} F$ и формация $\mathfrak{F}$ порождается группой Шмидта, удовлетворяющей условию 1).

Рассмотрим теперь случай, когда R является неабелевой группой. Пусть $|\pi| = 1$ и $p \in \pi$. Тогда по лемме 2.1.16 получаем, что $F_p(G) = 1$ и минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник f формации $\mathfrak{F}$ на p принимает значение $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$. По лемме 2.4.1, $f(p)$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_p$-формацией, где $\mathfrak{N}_p = N(p)$ — значение канонического спутника формации $\mathfrak{N}$. Так как $G/R \in \mathfrak{N}$, то $l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/R) \subset f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$. Следовательно, $G/P \in \mathfrak{N}_p$, т.е. G/R — p-группа, и G удовлетворяет условию 2) теоремы.

Пусть теперь $|\pi| > 1$. Заметим, что если $n = 1$, то теорема следует из леммы 3.1.7. Путь $n > 1$. Тогда существуют по крайней мере два различных простых числа p и q из π, минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ на которых принимает значения

$$f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$$

и

$$f(q) = l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}(G/F_q(G)) = l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}G$$

соответственно. Применяя лемму 2.4.1, с одной стороны получаем, что $l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}G$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_p$ -формацией, а с другой — минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_q$ -формацией, т.е. $G/R \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = (1)$. Тогда $G = R$ — простая неабелева группа. Поскольку $Z_p \in \mathfrak{N}_p$ и $O_q(Z_p) = 1$, то ввиду леммы 3.1.6 существует точный неприводимый $F_q[Z_p]$ -модуль V, где F_q — поле из q элементов. Пусть $G_1 = [V]Z_p$. Тогда, так как $G_1/O_p(G_1) \simeq Z_q \in f(p)$, то $G_1 \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} \neq l^{\omega}_n\mathrm{form}G_1$, то $l^{\omega}_n\mathrm{form}G_1 \in \mathfrak{N}$. А значит, получаем, что группа Шмидта $G_1 \in \mathfrak{N}$, что противоречит определению группы Шмидта. Следовательно, цоколь R группы G неабелев. Таким образом, случай, когда $G = R$ — простая неабелева группа и $n > 1$, невозможен.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l^{\omega}_n\mathrm{form}G$, где G — группа, удовлетворяющая условию теоремы.

Пусть $\pi = \pi(R) \cap \omega = \varnothing$, т.е R — ω'-группа. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ доказательство теоремы следует из леммы 3.1.7. Будем считать, что $n > 1$ и при $n-1$ теорема верна. Тогда, так как R — ω'-группа, то $G_{\omega d} = 1$, и минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ на ω' принимает значение $f(\omega') = l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}(G/G_{\omega d}(G)) = l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}G$. По предположению индукции $l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}G$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация. Применяя лемму 2.4.1, получаем, что $\mathfrak{F}$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь $\pi = \pi(R) \cap \omega \neq \varnothing$. Рассмотрим случай, когда R — абелева подгруппа. Тогда R — p-группа, где $p \in \omega$. По лемме 3.1.5 получаем $R = F_p(G)$. В этом случае в силу леммы 3.1.1 значение на p внутреннего $(n-1)$-кратно ω-локального спутника формации $\mathfrak{F}$ будет иметь вид

$$f(p) = l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}(G/R) =$$

$$= l^{\omega}_{n-1}\mathrm{form}Q = \begin{cases} \mathrm{form}Q, & \text{если } q \notin \omega, \\ \mathfrak{N}_q, & \text{если } q \in \omega. \end{cases}$$

Заметим, что $f(p)$ содержит только одну максимальную $(n-1)$-кратно ω-насыщенную подформацию (1). Так как $(1) \subseteq \mathfrak{N}_p = N(p)$, где $N(p)$ — значение канонического спутника формации $\mathfrak{N}$, то $f(p)$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_p$ -формацией. Применяя лемму 2.4.1 получаем, что $\mathfrak{F}$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь R — неабелева группа. По лемме 2.4.2 получаем $F_p(G) = 1$ и значение на p минимального $(n-1)$-кратно ω-локального спутника f формации $\mathfrak{F}$ равно

$$f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G.$$

В виду леммы 3.1.9 формация $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ имеет единственную максимальную $(n-1)$-кратно ω-насыщенную подформацию $\mathfrak{N}_p$, т.е. $f(p)$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p$ -формация. Применяя лемму 2.4.1, получаем, что $\mathfrak{F}$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы 3.1.10.

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 3.1.10 вытекает

3.1.11 Следствие. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной n-кратно p-насыщенной ненильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_n^p\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $R = G^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [R]Q$ — группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $R = C_G(R)$ и $|Q| = q$ — простое число;

2) R — неабелева pd-группа и $G/R \in \mathfrak{N}_p$;

3) R — p'-группа.

При $\omega = P$, из теоремы 3.1.10 получаем

3.1.12 Следствие [3, с. 191]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная n-кратно локальная ненильпотентная формация, где $n \geq 1$, когда $\mathfrak{F} = l_n\mathrm{form}G$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) G — группа Шмидта;

2) $n = 1$, G — простая неабелева группа.

Если $\omega = \{p\}$, $n = 1$, то из теоремы 3.1.10 вытекает

3.1.13 Следствие [70]. *В том и только в том случае формация $\mathfrak{F}$ является минимальной p-локальной ненильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_p\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [R]Q$ — p-замкнутая pd-группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$;

2) R — неабелева pd-группа и G/R — p-группа;

3) R — p'-группа.

Если $\omega = \mathbb{P}$, $n = 1$, то из теоремы 3.1.10 получаем следующее

3.1.14 Следствие [34]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная ненильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) G — группа Шмидта;

2) G — простая неабелева группа.

3.2 n-Кратно ω-насыщенные формации $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 1

Критические n-кратно ω-насыщенные формации, описанные выше, могут быть использованы при решении различных вопросов теории формаций. Особенно эффективно применение формаций такого рода в вопросах классификации частично насыщенных формаций с заданной системой подформаций. В данном разделе с помощью теоремы 3.1.10 получено описание n-кратно ω-насыщенных формаций, обладающих максимальной n-кратно ω-насыщенной нильпотентной подформацией.

Следствием теоремы 3.3.3 [21] является следующая

3.2.1 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация.*

3.2.2 Лемма [14]. *Пусть f_i такой внутренний $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, что $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{F}_2 = LF_\omega(f)$, где $f = f_1 \vee_{n-1}^\omega f_2$.*

Доказательство следующих двух лемм осуществляется аналогично доказательству лемм 20.4 и 20.3 [3]

3.2.3 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ — n-кратно ω-насыщенные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t соответственно $\mathfrak{H}_n^\omega$ -дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ и m, $r < \infty$, то $t \leq m + r$.*

3.2.4 Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — n-кратно ω-насыщенные формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $|\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}|_n^\omega \leq |\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_n^\omega$.*

3.2.5 Лемма [14]. *Для всех $n \geq 0$ решетка l_n^ω модулярна.*

3.2.6 Лемма [12-А]. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда в формации $\mathfrak{F}$ не существует минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$.*

Доказательство. Будем считать, что $n > 1$, так как при $n = 1$ доказательство следует из леммы 3.2.1. Положим, что в $\mathfrak{F}$ существует минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{H}_2$, отличная от $\mathfrak{H}_1$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{M}_1$ — максимальная n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$ и

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_1.$$

Ввиду теоремы 3.1.10 $\mathfrak{H}_i = l^\omega \mathrm{form} G_i (i = 1, 2)$, где G_i — такая монолитическая группа с цоколем $R_i = G_i^{\mathfrak{N}}$, что либо $\pi_i = \pi(R_i) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi_i \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) $G_i = [R_i]Q_i$ — группа Шмидта с $\Phi(G_i) = 1$, где $R_i = O_{p_i}(G_i)$, $p_i \in \omega$ и $|Q_i| = q_i$ — простое число;

(2) R_i — неабелева группа, $G_i/R_i \in \mathfrak{N}_{p_i}$, где $p_i \in \omega$.

По лемме 3.1.1 формации $\mathfrak{H}_i$ ($i = 1,2$) и $\mathfrak{M}_1$ имеют такие внутренние $(n-1)$-кратно ω-локальные спутники h_i ($i = 1,2$) и m соответственно, что

$$h_i(a) = \begin{cases} l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(A/F_a(A)|A \in \mathfrak{H}_i), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H}_i), \\ \mathfrak{H}_i, & \text{если } a = \omega', \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{H}_i); \end{cases}$$

и

$$m(a) = \begin{cases} l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(A/F_a(A)|A \in \mathfrak{M}_1), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}_1), \\ \mathfrak{M}_1, & \text{если } a = \omega', \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{M}_1). \end{cases}$$

Тогда по лемме 3.2.2 получаем, что формация $\mathfrak{F}$ имеет такой $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник f, что $f(p) = h_i(p) \vee_{n-1}^{\omega} m(p)$ $(i = 1,2)$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{H}_i \vee_{n-1}^{\omega} \mathfrak{M}_1 = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(\mathfrak{H}_i \cup \mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $\pi_2 \neq \varnothing$ и для группы G_2 выполнено условие (1) теоремы 3.1.10, т.е. $G_2 = [R_2]Q_2$. Так как $R_2 = O_{p_2}(G_2)$, то $G_2/O_{p_2}(\mathrm{G}_2) \in f(p) = h_i(p) \vee_{n-1}^{\omega} m(p)$. В силу того, что $\mathfrak{M}_1$ — нильпотентная формация, то, применяя лемму 2.4.3, получаем $m(p_2) \leq n(p_2)$, где $n(p_2) = (1)$ — минимальный спутник формации $\mathfrak{N}$. Тогда $G_2/O_{p_2}(\mathrm{G}_2) \in f(p) = h_i(p) \vee_{n-1}^{\omega} m(p) \subseteq h_i(p) \vee_{n-1}^{\omega} (1) = h_i(p)$.

Используя лемму 2.1.4, получаем, что $G_2 \in \mathfrak{H}_1$, т.е. $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$. Противоречие.

Пусть $\pi_2 \neq \varnothing$ и для группы G_2 выполнено условие (2) теоремы 3.1.10. Так как R_2 — неабелева группа, то, ввиду леммы 2.4.2, $F_{p_2}(G_2) = 1$. Тогда

$$G_2/F_{p_2}(G_2) \simeq G_2/1 \simeq G_2 \in f(p) = h_i(p) \vee_{n-1}^{\omega} m(p) \subseteq$$

$$\subseteq h_i(p) \vee_{n-1}^{\omega} (1) = h_i(p) \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Т.е. $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$ и опять получаем противоречие.

Пусть, наконец, $\pi_2 = \varnothing$. Тогда R_2 — ωd-группа. Заметим, что если R_2 — неабелева, то этот случай аналогичен (2). Значит, R_2 — абелева p_2-группа.

Рассмотрим формацию $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{H}_2$. Поскольку формация $\mathfrak{H}_1$ содержится в формации $\mathfrak{H}^*$ и нильпотентный дефект n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{H}_1$ равен 1, то по лемме 3.2.4 получаем, что $|\mathfrak{H}^* : \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{N}|_n^{\omega} \geq 1$. С другой стороны, так как $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{F}$ и нильпотентный дефект n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ равен 1, то по лемме 3.2.4 $|\mathfrak{H}^* : \mathfrak{H}^* \cap$

$\mathfrak{N}|_n^\omega \leq 1$. Значит, нильпотентный дефект n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{H}^*$ равен 1. Поэтому в $\mathfrak{H}^*$ существует максимальная n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация $\mathfrak{L}$. Понятно, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{L} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{L} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_2$.

Поскольку P_2 является абелевой p_2-группой и единственной минимальной нормальной подгруппой в G_2 такой, что $G_2/P_2 \in \mathfrak{L} = \mathfrak{H}^* \cap \mathfrak{N}$, то $G_2\mathfrak{L} = P_2$. Это означает, что $G_2 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Кроме того, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. А так как по лемме 2.1.5 формация $\mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ является ω-насыщенной формацией и $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{L} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_2$, то $\mathfrak{H}^* \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Поэтому $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{L} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$ и $G_1 \in \mathfrak{N}_{p_2}\mathfrak{L}$. Таким образом, получаем, что P_1 является p_2-группой.

Рассмотрим решетку $\mathfrak{H}^* \vee_n^\omega \mathfrak{N}/_n^\omega\mathfrak{N}$. Ввиду леммы 3.2.5

$$\mathfrak{H}^* \vee_n^\omega \mathfrak{N}/_n^\omega\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{H}^*/_n^\omega\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}^*/_n^\omega\mathfrak{L}.$$

Таким образом, $\mathfrak{N}$ является максимальной n-кратно ω-насыщенной подформацией в $\mathfrak{H}^* \vee_n^\omega \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{N} = \mathfrak{H}^* \vee_n^\omega \mathfrak{N} = \mathfrak{H}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{N}$. Значит, $G_1 \in \mathfrak{H}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{N}$. Следовательно,

$$G_1 \in l_n^\omega \mathrm{form}(\mathfrak{H}_2 \cup \mathfrak{N}) = l_n^\omega\ \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{N}_\omega \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{N}).$$

Так как P_1 — p_2-группа и $p_2 \in \{\omega'\}$, то $G_1 \in \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{N})$. Но $G_1 \notin \mathfrak{N}$. Значит, $G_1 \in \mathrm{form}(\{G_2\} \cup \mathfrak{N})\backslash\mathfrak{N}$. Поскольку для любой группы A из $\{G_2\} \cup \mathfrak{N}$, подгруппа $A^{\mathfrak{N}}$ не содержит фраттиниевых A-главных факторов, то по лемме 2.1.7 получаем $G_1 \in H(\{G_2\} \cup \mathfrak{N})$.

Так как $G_1 \notin \mathfrak{N}$ и $G_2/P2 \in \mathfrak{N}$, то $G_1 \simeq G_2$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$. Снова получили противоречие.

Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных ω-насыщенных ненильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$. Лемма доказана.

3.2.7 Теорема [8-А, 12-А]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен* 1, *когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_n^\omega (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_n^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Так как $\mathfrak{F}$ не является нильпотентной формацией, то по лемме 3.2.1

в $\mathfrak{F}$ входит некоторая минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}_1$. По условию $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$ — максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_1$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекты n-кратно ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}_1$ равны соответственно t, m и r. Поскольку $\mathfrak{M}$ — n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, то $m = 0$. Так как $\mathfrak{H}_1$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация, то ее $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект r равен 1. В силу леммы 3.2.3 имеет место неравенство $t \leq m + r = 0 + 1 = 1$. Если $t = 0$, то $\mathfrak{F}$ — нильпотентная формация, что противоречит условию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1.

Докажем теперь справедливость утверждения 1) второй части теоремы. Так как $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1$ — максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{H}_1$, то, в силу леммы 3.2.5, имеет место решеточный изоморфизм

$$(((\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1) \vee_n^\omega \mathfrak{M}) \vee_n^\omega \mathfrak{H}_1)/_n^\omega((\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1) \vee_n^\omega \mathfrak{M}) \simeq \mathfrak{H}_1/_n^\omega \mathfrak{H}_1 \cap ((\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1) \vee_n^\omega \mathfrak{M}) =$$

$$= \mathfrak{H}_1/_n^\omega(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1) \vee_n^\omega (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}_1/_n^\omega \mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1.$$

Следовательно, $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1) \vee_n^\omega \mathfrak{M}$ — максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$, то всякая n-кратно ω-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_1) \vee_n^\omega \mathfrak{M}$.

Докажем утверждение 2). Используя лемму 3.2.6, получаем, что в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных подформаций, отличных от $\mathfrak{H}_1$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда в силу уже доказанного и леммы 3.2.6 получаем, что $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, применяя лемму 3.2.5, получаем

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}).$$

Теорема доказана.

В частности, при $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 3.2.7 вытекает

3.2.8 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{N}_n$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно насыщенная нильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — минимальная n-кратно насыщенная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая n-кратно насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_n (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая n-кратно насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_n (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 3.2.7 получаем

3.2.9 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно p-насыщенная формация. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{N}_n^p$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно p-насыщенная нильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — минимальная n-кратно p-насыщенная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{F}$, при этом:*

1) всякая n-кратно p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_n (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H} \vee_n (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$.

Если $n = 1$, то из теоремы 3.2.7 вытекает следствие 2.2.6. Если $n = 1$, $\omega = \{p\}$, то из теоремы 3.2.7 получаем следствие 2.2.7. Если $n = 1$, $\omega = \mathbb{P}$, то из теоремы 3.2.7 вытекает следствие 2.2.8.

3.3 l_n^ω-Приводимые формации $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2

Целью данного раздела является описание внутреннего строения l_n^ω-приводимых формаций $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2.

3.3.1 Лемма [31]. *При $n \geq 2$ всякая n-кратно насыщенная формация, имеющая нильпотентный дефект 2, приводима.*

3.3.2 Теорема [8-A, 12-A, 18-A]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — l_n^ω-приводимая формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{H}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные n-кратно ω-насыщенные ненильпотентные формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_n^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — l_n^ω-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2, $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{H}$, причем если $n > 1$, то $\pi(\mathfrak{H}) \nsubseteq \omega$.

Доказательство. Заметим, что при $n = 1$, доказательство следует из теоремы 2.3.2. Поэтому можем считать, что $n > 1$.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, $\mathfrak{X}$ — такая максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{X}$ равен 1. По теореме 3.2.7 получаем $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}_1$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная формация, а $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Если в формации $\mathfrak{F}$ имеется еще одна минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{H}_2$, отличная от $\mathfrak{H}_1$, то, в силу леммы 3.2.6, $\mathfrak{H}_2 \not\subseteq \mathfrak{X}$. Значит,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{H}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{M}$$

и выполнено условие 1).

Пусть теперь в формации $\mathfrak{F}$ нет отличных от $\mathfrak{H}_1$ минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных подформаций. Поскольку $\mathfrak{F}$ — l_n^ω-приводимая формация, то в $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{X}$ найдется такая группа G, что $\mathfrak{R} = l_n^\omega \mathrm{form} G \neq \mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_n^\omega \mathfrak{R}$. Ввиду леммы 3.2.4 $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{R}$ меньше или равен 2. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_n^\omega \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{X}$ равен 1, то $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{R}$ не равен 0. Допустим, что $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{R}$ равен 1. Тогда по теореме 3.2.7 и предположению о единственности $\mathfrak{H}_1$ получаем, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}$. Значит,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_n^\omega \mathfrak{R} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_2,$$

где $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{N}$. Но тогда в силу леммы 3.2.4 $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{R}$ равен 2. Тогда $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{R}$, так как иначе $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$, что противоречит максимальности формации $\mathfrak{X}$ в формации $\mathfrak{F}$. Таким образом,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_n^\omega \mathfrak{R} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{R} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{R}.$$

Предположим, что $\mathfrak{R}$ — l_n^ω-неприводимая формация. Заметим, что если $\pi(\mathfrak{R}) \subseteq \omega$ и $\mathfrak{R}$ — ω-насыщенная формация, то $\mathfrak{R}$ является насыщенной формацией. Действительно, из ω-насыщенности формации $\mathfrak{R}$ получаем, что для любой группы G из условия $G/O_\omega(G) \cap \Phi(G) \in \mathfrak{R}$ следует, что $G \in \mathfrak{R}$. Но $\pi(\mathfrak{R}) \subseteq \omega$. Значит, $G = O_\omega(G)$. Тогда получаем, что из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{R}$ следует, что $G \in \mathfrak{R}$. Таким образом, $\mathfrak{R}$ является насыщенной формацией. Ввиду леммы 3.3.1 всякая n-кратно насыщенная формация, имеющая нильпотентный дефект 2, приводима. В этом случае $\mathfrak{R}$ — приводимая n-кратно насыщенная формация. Противоречие. Поэтому $\pi(\mathfrak{R}) \not\subseteq \omega$. Тогда получаем, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть теперь $\mathfrak{R}$ — l_n^ω-приводимая формация. Воспользуемся индукцией по числу разрешимых n-кратно ω-насыщенных подформаций однопорожденной формации $\mathfrak{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{X}_1$ максимальную n-кратно ω-насыщенную подформацию формации $\mathfrak{R}$, имеющую $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект, равный 1. Так как $\mathfrak{R}$ — l_n^ω-приводимая формация, то в $\mathfrak{R} \backslash \mathfrak{X}_1$ существует такая группа G_1, что $\mathfrak{R}_1 = l_n^\omega \mathrm{form} G_1 \neq \mathfrak{R}$. Ввиду максимальности формации $\mathfrak{X}_1$ в формации $\mathfrak{R}$ справедливо $\mathfrak{R} = \mathfrak{X}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{R}_1$. По теореме 3.2.7 и предположению единственности $\mathfrak{H}_1$ получаем, что $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2$ — некоторая нильпотентная

n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{X}_1$. Тогда

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{X}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{M}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{R}_1.$$

Заметим, что повторяя приведенные выше рассуждения для $\mathfrak{R}$, получаем, что либо формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1^* \vee_n^\omega \mathfrak{R}_1$ (где $\mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{M}_1$) удовлетворяет условию 2), и необходимость доказана, либо формация $\mathfrak{R}_1$ является l_n^ω-приводимой формацией $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2. Понятно, что $\mathfrak{M}_2 \not\subseteq \mathfrak{R}_1$, так как иначе $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{R}_1$, что противоречит максимальности формации $\mathfrak{X}_1$ в $\mathfrak{R}_1$.

Поскольку $\mathfrak{R}_1$ — собственная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{R}$, то число разрешимых подформаций формации $\mathfrak{R}_1$ меньше, чем у $\mathfrak{R}$. Ввиду замечания 3 [14] в однопорожденной формации $\mathfrak{R}$ имеется лишь конечное множество разрешимых n-кратно ω-насыщенных подформаций. Поэтому, повторяя описанные выше действия, через конечное число шагов мы придем к ситуации, когда либо формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_m^* \vee_n^\omega \mathfrak{R}_m$ (где $\mathfrak{M}_m^* = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{M}_1 \vee_n^\omega \cdots \vee_n^\omega \mathfrak{M}_m$) удовлетворяет условию 2) и необходимость доказана, либо $\mathfrak{R}_m = \mathfrak{R}_{m+1} \vee_n^\omega \mathfrak{M}_{m+2}$, где $\mathfrak{R}_{m+1}$ — l_n^ω-приводимая формация $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2, $\mathfrak{M}_{m+2} \subseteq \mathfrak{N}$ — наименьшая неединичная разрешимая подформация формации $\mathfrak{R}$, такая что $\mathfrak{M}_{m+2} \not\subseteq \mathfrak{R}_{m+1}$.

Обозначим через $\mathfrak{X}_{m+2}$ максимальную n-кратно ω-насыщенную подформацию формации $\mathfrak{R}_{m+1}$, имеющую $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект, равный 1. Так как $\mathfrak{R}_{m+1}$ — l_n^ω-приводимая формация, то в $\mathfrak{R}_{m+1} \backslash \mathfrak{X}_{m+2}$ существует такая группа G_{m+2}, что $\mathfrak{R}_{m+2} = l_n^\omega \mathrm{form} G_{m+2} \neq \mathfrak{R}_{m+1}$. Ввиду максимальности формации $\mathfrak{X}_{m+2}$ в формации $\mathfrak{R}_{m+1}$ справедливо $\mathfrak{R}_{m+1} = \mathfrak{X}_{m+2} \vee_n^\omega \mathfrak{R}_{m+2}$. По теореме 3.2.7 и предположению единственности $\mathfrak{H}_1$ получаем, что $\mathfrak{X}_{m+2} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_{m+3}$, где $\mathfrak{M}_{m+3}$ — некоторая нильпотентная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{X}_{m+2}$. Тогда

$$\mathfrak{R}_{m+1} = \mathfrak{X}_{m+2} \vee_n^\omega \mathfrak{R}_{m+2} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{M}_{m+2} \vee_n^\omega \mathfrak{R}_{m+2} = \mathfrak{M}_{m+2} \vee_n^\omega \mathfrak{R}_{m+2}.$$

Но $\mathfrak{M}_{m+3} \subseteq \mathfrak{R}_{m+2}$ по предположению индукции. Следовательно, формация $\mathfrak{R}_{m+1}$ не может быть l_n^ω-приводимой формацией. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_{m+1}^* \vee_n^\omega \mathfrak{R}_{m+1}$, где $\mathfrak{M}_{m+1}^* = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{M}_1 \vee_n^\omega \cdots \vee_n^\omega \mathfrak{M}_{m+1} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}_{m+1}$ — l_n^ω-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{H}_2 \vee_n^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные n-кратно ω-насыщенные ненильпотентные формации. Пусть f, h_1, h_2 и m — $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекты формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда по лемме 3.2.3 $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ меньше или равен 2. С другой стороны, по лемме 3.2.4 $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ больше или равен 2. Таким образом, $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Аналогично рассматривается случай, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_n^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — l_n^ω-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы 3.3.2.

В частности, если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 3.3.2 получаем

3.3.3 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — l_n^p-приводимая формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{N}_n^p$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_n^p \mathfrak{H}_2 \vee_n^p \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные n-кратно p-насыщенные ненильпотентные формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_n^p \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — l_n^p-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n^p$-дефекта 2, $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{H}$, причем, если $n > 1$, то $\pi(\mathfrak{H}) \nsubseteq \{p\}$.

Если ω — множество всех простых чисел, то из теоремы 3.3.2 вытекает

3.3.4 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая n-кратно насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{N}_n$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_n \mathfrak{H}_2 \vee_n \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_n \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — l_n-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n$-дефекта 2, $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{H}$, причем $n = 1$.

Если ω — множество всех простых чисел, $n \geq 2$, то из теоремы 3.3.2 вытекает

3.3.5 Следствие [31]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно насыщенная формация* ($n \geq 2$). *Тогда и только тогда нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_n \mathfrak{H}_2 \vee_n \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные n-кратно насыщенные ненильпотентные формации.*

Если $n = 1$, то из теоремы 3.3.2 получаем

3.3.6 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая ω-насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{N}^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee^\omega \mathfrak{H}_2 \vee^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные ω-насыщенные ненильпотентные формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee^\omega \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ — неприводимая ω-насыщенная формация $\mathfrak{N}^\omega$-дефекта 2, $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{H}$.

Если ω — множество всех простых чисел и $n = 1$, то из теоремы 3.3.2 вытекает

3.3.7 Следствие [26]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — приводимая насыщенная формация. В точности тогда нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные насыщенные ненильпотентные формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$ *— неприводимая насыщенная формация, нильпотентный дефект которой равен 2.*

3.4 l_n^ω-Неприводимые формации $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2

Целью данного раздела является описание неприводимых n-кратно ω-насыщенных формаций $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2.

3.4.1 Лемма [14]. *Пусть* $\mathfrak{F} = LF_\omega(F)$ *— n-кратно ω-насыщенная формация,* $n \geq 1$. *Тогда спутник F является* l_{n-1}^ω*-значным.*

3.4.2 Теорема [8-A, 12-A, 22-A]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-насыщенная формация ($n \geq 2$). Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ — l_n^ω-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2, когда* $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} G$, *где G — такая монолитическая группа с цоколем P, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [P]H$, *где* $P = C_G(P)$ *— p-группа,* $p \in \omega$, *а H — группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

1.1) циклическая примарная группа порядка q^2, $q \notin \omega$;

1.2) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, $q \notin \omega$;

1.3) монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$ *и Q — ω'-группа;*

2) P — неабелева группа, $\pi(P) \cap \omega = \{p\}$, *а группа* $(G/P)/O_p(G/P)$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

2.1) q-группа, $q \in \omega$;

2.2) элементарная абелева q-группа, $q \notin \omega$;

2.3) подпрямое произведение групп, изоморфных M, где M — такая монолитическая группа с цоколем L, что $L = M^{\mathfrak{N}_p}$ *— неабелева группа,* $\pi(L) \cap \omega = \{p\}$;

3) P — ω'-группа, формация $l_n^\omega \mathrm{form}(G/P)$ *имеет $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект 1, G — $\mathfrak{M}$-базисная группа, где* $\mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form} M \vee_n^\omega \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}$, *а M — такая монолитическая группа с цоколем* $L = M^{\mathfrak{N}}$, *что выполнено одно из следующих условий:*

3.1) $M = [L]N$ *— группа Шмидта с* $\Phi(M) = 1$, *где* $L = C_M(L)$ *— абелева p-группа,* $p \in \omega$, *и* $|N| = q$ *— простое число,* $q \neq p$;

3.2) $L = M^{\mathfrak{N}_p}$ *— неабелева группа, причем* $\pi(L) \cap \omega = \{p\}$;

3.3) L — ω'-группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — l_n^ω-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2, $\mathfrak{M}$ — максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$ с каноническим спутником $\dot{M}$. Заметим, что ввиду леммы 3.4.1 спутник $\dot{M}$ является $(n-1)$-кратно ω-локальным. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной n-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{M}$-формацией. Пусть f и m — минимальные $(n-1)$-кратно ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. В силу замечания 2 [14] имеет место равенство $\dot{M}(p) = \mathfrak{N}_p m(p)$, для всех $p \in \omega$.

Применяя лемму 2.4.1, получаем, что $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{M}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, $\Phi(G) = 1$ и $f(p)$ — $(\mathfrak{N}_p m(p))_{n-1}^\omega$-критическая формация для всех $p \in \pi$, либо $\pi = \varnothing$ и $f(\omega')$ — $\mathfrak{M}_{n-1}^\omega$-критическая формация. По теореме 3.2.7 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{M}_1$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная ненильпотентная подформация формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}$.

Предположим, что $\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega \neq \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$. Тогда найдется такое простое $r \in (\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega) \backslash \pi(\mathfrak{M})$. Пусть Z_r — группа порядка r. Тогда $l_n^\omega \mathrm{form} Z_r = \mathfrak{N}_r \not\subseteq \mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ — максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_r \not\subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{N}_r$. Но формация $\mathfrak{F}$ является l_n^ω-неприводимой по условию теоремы. Противоречие. Следовательно, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$.

Пусть m_1 и k — минимальные $(n-1)$-кратно ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{K}$ соответственно. По лемме 3.1.1 у формаций $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{K}$ существуют такие внутренние спутники $\bar{m}_1$ и $\bar{k}$, принимающие соответственно значения

$$\bar{m}_1(a) = \begin{cases} m_1(a), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M}_1), \\ \mathfrak{M}_1, & \text{если } a = \omega', \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{M}_1); \end{cases} ,$$

$$\bar{k}(a) = \begin{cases} k(a), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{K}), \\ \mathfrak{K}, & \text{если } a = \omega', \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \backslash \pi(\mathfrak{K}). \end{cases} .$$

Ввиду леммы 3.2.2 справедливо равенство $\bar{m} = \bar{m}_1 \vee_{n-1}^\omega \bar{k}$.

В силу леммы 3.1.10 $\mathfrak{M}_1 = l_n^\omega \mathrm{form} M$, где M — такая монолитическая группа с цоколем $L = M^{\mathfrak{N}}$, что либо $\tau = \pi(L) \cap \omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

(1) $M = [L]N$ — группа Шмидта с $\Phi(M) = 1$, где $L = C_M(L)$ — абелева l-группа, $l \in \omega$ и $|N| = q$ — простое число;

(2) L — неабелева ld-группа $M/L \in \mathfrak{N}_l$, где $\tau = \{l\}$.

Заметим, что если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то любая ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ является насыщенной. Следовательно, любая n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$ является n-кратно насыщенной. По лемме 3.3.1 при $n \geq 2$ всякая n-кратно насыщенная формация с нильпотентным дефектом 2 приводима. Поэтому при $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ формация $\mathfrak{F}$ не может быть

l_n^ω-неприводимой формацией, что противоречит условию. Таким образом, $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega' \neq \varnothing$.

Допустим, что P — неабелев цоколь группы G. Пусть $\pi = \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$ и $p \in \pi$. Тогда по лемме 2.4.2 имеем $F_p(G) = 1$. Значит,

$$f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G.$$

Пусть для формации $\mathfrak{M}_1$ выполнено условие (1). Предположим, что $p \neq l$. Так как $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$, то имеем $\bar{m}(p) = \bar{m}_1(p) \vee_{n-1}^\omega \bar{k}(p) = (1)$.

Тогда $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Значит, $G/P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$, $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$ и по лемме 3.1.10 $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Поэтому $p = l$. Используя лемму 3.1.1, имеем

$$\bar{m}_1(p) = m_1(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(M/F_p(M)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} N \subseteq \mathfrak{N}_q.$$

Следовательно, $G/P \in \mathfrak{N}_p m_1(p) = \mathfrak{N}_p l_{n-1}^\omega \mathrm{form} N \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$.

Покажем, что $\pi(P) \cap \omega = \{p\}$. Действительно, если $|\pi(P) \cap \omega| > 1$, то найдется такое $s \in \pi(P) \cap \omega$, что $s \neq p$. Поскольку $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$, то $s \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$. Тогда $\bar{m}(s) = \bar{m}_1(s) \vee_{n-1}^\omega \bar{k}(s) = (1)$. Так как s делит порядок P, то $F_s(G) = 1$. Тогда $f(s) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_s(G)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_s$-формацией. Поскольку $p \in \pi(P) \cap \omega$ и $n \geq 2$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq f(s)$. Так как при этом формация $\mathfrak{N}_p$ является $(n-1)$-кратно ω-насыщенной и $\mathfrak{N}_p \subset f(s)$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_s$. Но $s \neq p$. Противоречие. Поэтому $\pi(P) \cap \omega = \{p\}$.

По лемме 3.1.1 имеем

$$m_1(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(M/F_p(M)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(M/L) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} N.$$

Следовательно, $m(p) = m_1(p) \vee_{n-1}^\omega k(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} N$ и $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $(\mathfrak{N}_p l_{n-1}^\omega \mathrm{form} N)$-формацией.

Ясно также, что $G/P \notin \mathfrak{N}_p$, поскольку в противном случае $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1 в силу леммы 3.1.10.

Если $q = |N| \in \omega$, то $\mathfrak{N}_p l_{n-1}^\omega \mathrm{form} N = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$. Значит, $l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$ является минимальной $(n-1)$-кратно ω-насыщенной не $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$-формацией. Поэтому $G/P \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$. Тогда $(G/P)/O_p(G/P) \in \mathfrak{N}_q$, и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2.1) теоремы.

Если $q \notin \omega$, то $\mathfrak{N}_p l_{n-1}^\omega \mathrm{form} N = \mathfrak{N}_p \mathrm{form} N$. Тогда $G/P \in \mathfrak{N}_p \mathrm{form} N$. Так как $G/P \notin \mathfrak{N}_p$, то $(G/P)/O_p(G/P) \in \mathrm{form} N$, т.е. $(G/P)/O_p(G/P)$ является элементарной абелевой q-группой, и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2.2) теоремы.

Пусть для формации $\mathfrak{M}_1$ выполнено условие (2). Покажем, что $\pi(P)\cap\omega=\pi(L)\cap\omega$. Предположим, что существует $r\in\omega\cap(\pi(P)\backslash\pi(L))$. Тогда $m(r) = m_1(r)\vee_{n-1}^{\omega} k(r)$. Значит, $f(r) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_r$-формация. Поэтому $\pi(P)\cap\omega=\pi(L)\cap\omega=\{l\}$. Но $\pi(P)\cap\omega\neq\varnothing$. Следовательно, $l=p$.

Ввиду леммы 2.4.2, $F_p(M) = 1$. Так как $m_1(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M$, то $f(p)=l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ — минимальная не $\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M$-формация. Значит, $G/P\in\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M$. Но, как нетрудно показать, $\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M=\mathfrak{N}_p\mathrm{form}M$.

Если $G/P\in\mathfrak{N}_p$, то по лемме 3.1.10 $\mathfrak{N}_{n-1}^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Следовательно, $G/P\notin\mathfrak{N}_p$ и $(G/P)/O_p(G/P)\in\mathrm{form}M$. Но тогда $\mathrm{form}((G/P)/O_p(G/P))=\mathrm{form}M$. Так как при этом группа M является монолитической группой с неабелевым цоколем L, то, применяя лемму 2.1.7, получим, что $(G/P)/O_p(G/P)$ — подпрямое произведение групп, изоморфных группе M. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 2.3) теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{M}_1$ такая формация, что M — монолитическая группа с цоколем $L=M^{\mathfrak{N}}$, $\tau=\pi(L)\cap\omega=\varnothing$. Так как $p\in\pi(\mathfrak{M})\cap\omega$, то $m(p)=(1)$. Но тогда $f(p)=l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}G$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Значит, $G/P\in\mathfrak{N}_p$ и по лемме 3.1.10 получаем, что $\mathfrak{N}_n^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Таким образом, данный случай невозможен.

Пусть P — абелева p-группа, $p\in\omega$. Тогда по лемме 3.1.5 имеем $F_p(G)=P$. Пусть формация $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяет условию (1).

Предположим, что $p\neq l$. Тогда $m(p) = (1)$. Значит, $f(p)=l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Пусть H — группа минимального порядка из $f(p)\backslash\mathfrak{N}_p$. Тогда H является монолитической группой с цоколем $Q=H^{\mathfrak{N}_p}$. Ясно, что $f(p)=l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)=l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}H$ и $O_p(H)=1$. Применяя лемму 3.1.6, получаем, что существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль V. Обозначим через $T=[V]H$. Ввиду леммы 2.1.4 группа $T\in\mathfrak{F}$. Так как $T/F_p(T)\simeq H\notin m(p)$, то $\mathfrak{F}=l_n^{\omega}\mathrm{form}T$. Поскольку

$$f(p)=l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)\subseteq\mathfrak{M}$$

и формация $\mathfrak{M}$ разрешима, то Q — абелева r-группа для некоторого простого числа $r\neq p$. Но $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\vee_n^{\omega}\mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{N}_l\mathfrak{N}$. Если $r\neq l$, то группа H нильпотентна. Поскольку $H/Q\in\mathfrak{N}_p$, то $H=Q$ — группа простого порядка r. Но тогда по лемме 3.1.10 получаем, что $\mathfrak{N}_n^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1.

Противоречие. Поэтому $r = l$. Так как при этом $\{p, l\} \subseteq \omega$, то $\pi(G) \subseteq \omega$. Поэтому $p = l$.

Но тогда $m(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}N$ и $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $(\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}N)$-формация.

Рассмотрим группу $H \in f(p)\backslash\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}N$. Тогда H является монолитической группой с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}N}$. Поскольку

$$f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{M}$$

и формация $\mathfrak{M}$ разрешима, то Q — абелева r-группа для некоторого простого числа r. Ясно, что $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 3.1.6, получаем, что существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль V. Обозначим через $T = [V]H$. Ввиду леммы 2.1.4 группа $T \in \mathfrak{F}$. Так как $T/F_p(T) \simeq H \notin m(p)$, то $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}T$. Но $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \vee_n^{\omega} \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$. Значит, $H \in \mathfrak{N}$. Но H — монолитическая группа. Значит, H — r-группа. Если $r \in \omega$, то $\pi(G) \subseteq \omega$, что невозможно. Значит, $r \notin \omega$. Если $H = Q$, то по лемме 3.1.10 $\mathfrak{N}_n^{\omega}$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Следовательно, $H \neq Q$. Поскольку $H/Q \in l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}N$, то $r = q$. Таким образом, $l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}N = \mathrm{form}N$ и $H/Q \in \mathrm{form}N$. Тогда $f(p)$ — минимальная не $\mathrm{form}N$-формация. Поскольку группа H нильпотентна, то любая собственная подгруппа из H принадлежит $f(p)$. Таким образом, H — минимальная не $\mathrm{form}N$-группа. Так как при этом H — q-группа, то H либо циклическая примарная группа порядка q^2, либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q. Но тогда группа T удовлетворяет условию 1.1) или 1.2) теоремы.

Пусть для формации $\mathfrak{M}_1$ выполнено условие (2). Допустим, что $p \neq l$. Тогда $m(p) = (1)$. Значит, $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Поскольку $l \in \pi(G/P) \cap \omega$, то $l \in \pi(G/P)$. Так как при этом $n \geq 2$, то $\mathfrak{N}_l \subseteq l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P) = f(p)$. Если $\mathfrak{N}_l = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)$, то $\pi(G) \subseteq \omega$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{N}_l \subset l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)$. Но формация $\mathfrak{N}_p$ является $(n-1)$-кратно ω-насыщенной. Следовательно, $\mathfrak{N}_l \subseteq \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Таким образом, $p = l$.

Тогда $m(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M$ и $f(p) = l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}(G/P)$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M$-формация. Выберем в $f(p)\backslash\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M$ группу H минимального порядка. Тогда H — монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p l_{n-1}^{\omega}\mathrm{form}M}$ и $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 3.1.6, получаем, что существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль V. Обозначим через $T = [V]H$. Ввиду леммы 2.1.4 группа $T \in \mathfrak{F}$. Так как $T/F_p(T) \simeq H \notin m(p)$, то $\mathfrak{F} = l_n^{\omega}\mathrm{form}T$. Предположим, что Q — неабелев цоколь группы H. Ввиду того, что $H \in \mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$ и

$$l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{S}\mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K}),$$

то $H \in \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$. Следовательно, по лемме 2.1.7 имеем $H \in \mathbf{H}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$. Поскольку $H \notin \mathfrak{K}$ и $M/L \in \mathfrak{N}_p$, то группа H изоморфна группе M. Но тогда $T \in \mathfrak{N}_p l_n^\omega \mathrm{form} M$. Однако, $\mathfrak{N}_p l_n^\omega \mathrm{form} M = l_n^\omega \mathrm{form} M$. Поэтому $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} M$ и $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Противоречие. Следовательно, Q — абелева q-группа, для некоторого простого числа $q \neq p$. Допустим, что $q \in \omega$. Пусть D — группа порядка q. Тогда $D \in f(p)$. Пусть V — точный неприводимый $F_p[D]$-модуль и W=$[V]D$. Применяя лемму 2.1.4 получим $W \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3.1.10 формация $\mathfrak{L} = l_n^\omega \mathrm{form} W$ имеет $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект 1. Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}_1$, то мы получаем противоречие с леммой 3.2.4. Значит, $q \in \omega'$. Поскольку $H \in \mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$ и

$$l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{S}_\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K}),$$

то $H \in \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$. Следовательно, по лемме 2.1.7 имеем $H \in \mathbf{H}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$. Так как $H \notin \mathfrak{K}$ и $M/L \in \mathfrak{N}_p$, то группа H изоморфна группе M. Но L — ld-группа. Противоречие. Следовательно, данный случай невозможен.

Пусть формация $\mathfrak{M}_1$ такая, что $\tau = \pi(L) \cap \omega = \varnothing$. Так как $p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$, то $m(p) = (1)$. Но тогда $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/P)$ — минимальная $(n-1)$-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Пусть H — группа минимального порядка из $f(p) \backslash \mathfrak{N}_p$. Тогда H является монолитической группой с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$. Понятно, что $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/P) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} H$ и $O_p(H) = 1$. Применяя лемму 2.1.4 получаем, что $T = [V]H \in \mathfrak{F}$, где V — точный неприводимый $F_p[H]$-модуль. Так как $T/F_p(T) \simeq H \notin m(p)$, то $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} T$.

Пусть Q — абелева q-группа для некоторого простого числа q. Если $q \in \omega$, то $\pi(T) \subseteq \omega$. Противоречие. Значит, $q \in \omega'$. Кроме того, понятно, что $H \notin \mathfrak{N}$. Так как в противном случае $H \in \mathfrak{N}_q$ и по лемме 3.1.10 формация $\mathfrak{F} = l_n^\omega \mathrm{form} T$ имеет $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект 1.

Поскольку $H \in \mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$ и формация $l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$ содержится в $\mathfrak{S}_\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$, то $H \in \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K}) \backslash \mathfrak{N}$. Тогда по лемме 2.1.7 получим, что $H \in \mathbf{H}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$. Так как $H \notin \mathfrak{K}$ и $M/L \in \mathfrak{N}$, то группа H изоморфна группе M.

Пусть Q — неабелев цоколь группы H. Тогда так как $H \in \mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$ и $l_n^\omega \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{S}\mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$, то $H \in \mathrm{form}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$. Применяя теперь лемму 2.1.7, заключаем, что $H \in \mathbf{H}(\{M\} \cup \mathfrak{K})$. Так как $H \notin \mathfrak{K}$ и $M/L \in \mathfrak{N}_l$, то ввиду монолитичности H получаем, что группы H и M изоморфны.

Кроме того, заметим, что $M/L \in \mathfrak{N}_p$. Поскольку иначе найдется группа R простого порядка $r \neq p$. Пусть V — точный неприводимый $F_p[R]$-модуль и W=$[V]R$. Применяя лемму 2.1.4, получим $W \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3.1.10 формация $\mathfrak{L} = l_n^\omega \mathrm{form} W$ имеет $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект 1. Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}_1$, то мы пришли получаем противоречие с леммой 3.2.4. Значит, $M/L \in \mathfrak{N}_p$. Таким образом, группа T удовлетворяет условию 1.3) теоремы.

Пусть теперь P — ω'-группа и пусть формация $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяет условию (1) или (2). Тогда $G/P \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_l\mathfrak{N}$ или, соответственно, $G/P \in \mathfrak{M}\mathfrak{G}_{\omega d}\mathfrak{N}$. Если $P \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{N}_l\mathfrak{N}$ или $G \in \mathfrak{G}_{\omega d}\mathfrak{N}$. Но P — ω'-группа. Значит, $G \in \mathfrak{N}$. Противоречие. Поэтому $P \not\subseteq \Phi(G)$. Но тогда $\mathrm{form}(G/P)$ — единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form} G$ и G — $\mathfrak{M}$-базисная группа.

Если $G/P \in \mathfrak{N}$, то по лемме 3.1.10 формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект 1. Противоречие. Значит, $G/P \notin \mathfrak{N}$. Так как при этом, $G \in \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/P)$ равен 1. Значит, G удовлетворяет условию 3.1) или 3.2) теоремы.

Пусть теперь для формации $\mathfrak{M}_1$ выполняется условие $\pi(L) \cap \omega = \varnothing$. Тогда по лемме 2.4.1 $f(\omega') = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} G$ — минимальная n-кратно ω-насыщенная не $\mathfrak{M}$-формация. Снова применяя лемму 2.4.1, получим, что $l_{n-2}^\omega \mathrm{form} G$ — $\mathfrak{M}_{n-2}^\omega$-критическая формация, ..., $\mathrm{form} G$ — минимальная не $\mathfrak{M}$-формация и G — $\mathfrak{M}$-базисная группа. Если $G/P \in \mathfrak{N}$, то по лемме 3.1.10 формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект 1. Противоречие. Значит, $G/P \notin \mathfrak{N}$. Так как при этом, $G/P \in \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $l_n^\omega \mathrm{form}(G/P)$ равен 1. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 3.3) теоремы.

Достаточность. Пусть для формации $\mathfrak{F}$ выполнено условие 1) теоремы и H — циклическая примарная группа порядка q^2, $q \notin \omega$. Пусть f — минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3.1.1 имеем $f(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}(G/F_p(G)) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form} H$. Так как $q \notin \omega$, то получаем, что $l_{n-1}^\omega \mathrm{form} H = \mathrm{form} H$. Заметим, что $\mathrm{form} Z_q$ является единственной максимальной подформацией формации $\mathrm{form} H$, где Z_q — группа порядка q.

Построим $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник m, принимающий следующие значения

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form} Z_q, & \text{если } a = p, \\ f(a), & \text{если } a = (\omega \cup \{\omega'\}) \backslash \{p\}. \end{cases}$$

Рассмотрим n-кратно ω-насыщенную формацию $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$. Пусть m_1 — минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}$. Тогда так как $m_1 \leq m \leq f$, то, ввиду леммы 3.1.8, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная собственная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. И пусть x — минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{X}$. Если $x(p) = f(p)$, то так как $G/O_p(G) \in x(p)$, получаем $G \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Противоречие. Значит, $x(p) \subset f(p)$. Тогда, так как $m(p) = \mathrm{form}Z_q$ — единственная максимальная подформация $f(p)$, то $x(p) \subseteq m_1(p)$ и $x(a) \subseteq m(a)$ для $a \in (\omega \cup \{\omega'\}) \backslash \{p\}$, т.е. $x \leq m_1$. По лемме 3.1.8 получаем, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{F}$ является l_n^ω-неприводимой формацией.

Поскольку $O_p(Z_q) = 1$, то ввиду леммы 3.1.6 существует точный неприводимый $F_p[Z_q]$-модуль V, где F_p — поле из p элементов. Пусть $G_1 = [V]Z_q$. Тогда, так как $G_1/O_p(G_1) \simeq Z_q \in m(p)$, то $G_1 \in \mathfrak{M}$. Если предположить, что $\mathfrak{R} = l_n^\omega \mathrm{form}G_1 \subset \mathfrak{M}$, то по лемме 3.1.8 получаем $r \leq m_1$, где r — минимальный $(n-1)$-кратно ω-насыщенный спутник формации $\mathfrak{R}$. Но тогда $r(p) = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}Z_q = \mathrm{form}Z_q \subset \mathrm{form}Z_q$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} = l_n^\omega \mathrm{form}G_1$, т.е.формация $\mathfrak{M}$ порождается группой Шмидта и имеет $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект 1. Но тогда $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Случаи, когда H — неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты ($q \notin \omega$), и H — монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$, что Q — ω'-группа, рассматриваются аналогично.

Пусть для формации $\mathfrak{F}$ выполнено условие 2) теоремы. Построим l_n^ω-значный спутник m, принимающий следующие значения

$$m(a) = \begin{cases} l_{n-1}^\omega \mathrm{form}((G/P)/O_p(G/P)), & \text{если } a = p, \\ f(a), & \text{если } a = (\omega \cup \{\omega'\}) \backslash \{p\}. \end{cases}$$

Ясно, что $m(p) \subset f(p)$.

Рассмотрим n-кратно ω-насыщенную формацию $\mathfrak{M}$, порожденную спутником m. Пусть m_1 — минимальный $(n-1)$-кратно ω-локальный спутник формации $\mathfrak{M}$. Тогда так как $m_1 \leq m \leq f$, то, ввиду леммы 3.1.8, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная собственная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, x — ее минимальный l_{n-1}^ω-значный спутник. Тогда $x(a) \subseteq m(a)$ для любого $a \in (\omega \cup \{\omega'\}) \backslash \{p\}$. Кроме того, как нетрудно показать, имеет место включение

$$x(p) \subseteq \mathfrak{N}_p l_{n-1}^\omega \mathrm{form}M = \mathfrak{N}_p l_{n-1}^\omega \mathrm{form}((G/P)/O_p(G/P)) = \mathfrak{N}_p m(p).$$

Ввиду леммы 3.1.8 получаем, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{F}$ является l_n^ω-неприводимой формацией.

В силу леммы 3.1.10 $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Но тогда $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект l_n^ω-неприводимой формации $\mathfrak{F}$ равен 2.

Пусть для формации $\mathfrak{F}$ выполнено условие 3). Построим ω-локальный спутник f_n — такой, что $f(\omega') = \mathrm{form}G$ и $f(a) = m(a)$ для любого $a \in \omega$.

Так как группа G является $\mathfrak{M}$-базисной, то всякая подформация из $\mathrm{form}G$ содержится в $\mathfrak{M}$. Следовательно, формация $\mathfrak{F}_{n-1} = LF_\omega(f_n)$ по лемме 2.4.1 является $\mathfrak{M}$-критической. Пусть теперь f_n — такой l_1^ω-значный ω-локальный спутник, что $f_{n-1}(\omega') = l_1^\omega \mathrm{form}G$ и $f_{n-1}(a) = m(a)$ для любого $a \in \omega$. Снова применяя лемму 2.4.1, получаем, что формация $\mathfrak{F}_{n-2} = LF_\omega(f_{n-1})$ является $\mathfrak{M}^\omega$-критической и т.д. Построим l_{n-1}^ω-значный ω-локальный спутник f_1 такой, что $f_1(\omega') = l_{n-1}^\omega \mathrm{form}G$ и $f_1(a) = m(a)$ для любого $a \in \omega$. Опять применяя лемму 2.4.1, получим, что формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$ является $\mathfrak{M}_n^\omega$-критической. Заметим также, что ввиду леммы 3.1.10 $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект формации $\mathfrak{M}$ равен 1. Следовательно, $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефект l_n^ω-неприводимой формации равен 2. Теорема доказана.

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 3.4.2 получаем

3.4.3 Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — n-кратно p-насыщенная формация $(n \geq 2)$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ — l_n^p-неприводимая формация $\mathfrak{N}_n^p$-дефекта 2, когда $\mathfrak{F} = l_n^p \mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с цоколем P, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, а H — группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:

1.1) циклическая примарная группа порядка q^2, $q \neq p$;

1.2) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, $q \neq p$;

1.3) такая монолитическая группа с цоколем $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$ и Q — p'-группа;

2) P — неабелева pd-группа, $p \in \pi(P)$, а группа $(G/P)/O_p(G/P)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

2.1) элементарная абелева q-группа, $q \neq p$;

2.2) подпрямое произведение групп, изоморфных M, где M — такая монолитическая группа с цоколем L, что $L = M^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа, $p \in \pi(L)$;

3) P — p'-группа, формация $l_n^p \mathrm{form}(G/P)$ имеет $\mathfrak{N}_n^p$-дефект 1, G — $\mathfrak{M}$-базисная группа, где $\mathfrak{M} = l_n^p \mathrm{form}M \vee_n^p \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}$, а M — такая монолитическая группа с цоколем $L = M^{\mathfrak{N}}$, что выполнено одно из следующих условий:

3.1) $M = [L]N$ — группа Шмидта с $\Phi(M) = 1$, где $L = C_M(L)$ — абелева p-группа, и $|N| = q$ — простое число;

3.2) $L = M^{\mathfrak{N}_p}$ — неабелева группа, причем $p \in \pi(L)$;

3.3) L — p'-группа.

3.5 Краткие выводы

Третья глава диссертации посвящена решению проблемы 5, поставленной А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в 1999 г., об описании структурного стронения n-кратно ω-насыщенных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2. Для решения этой задачи в главе 3.1 была получена классификация конечных групп, порождающих минимальные n-кратно ω-насыщенные ненильпотентные формации. В разделе 3.2 дана классификация n-кратно ω-насыщенных формаций, обладающих максимальной n-кратно ω-насыщенной нильпотентной подформацией. В разделе 3.3 установлено внутреннее решеточное строение l_n^ω-приводимых формаций $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2. В разделе 3.4 получено описание конечных групп, порождающих l_n^ω-неприводимые формации $\mathfrak{N}_n^\omega$-дефекта 2 при $n > 1$. Заметим, что описание групп, порождающих l^ω-неприводимые формации $\mathfrak{N}^\omega$-дефекта 2 получено В.Г. Сафоновым в работе [71].

ГЛАВА 4

ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ С БУЛЕВОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДФОРМАЦИЙ

Формации конечных групп с системами дополняемых подформаций впервые начал рассматривать А.Н. Скиба (1981г.). В дальнейшем, развивая идеи А.Н. Скибы, М.И. Эйдинов и В.А. Ведерников (1990г.) описали формации, все подформации которых дополняемы. Кроме того, В.А. Ведерников (1990г.) исследовал насыщенные формации с системами дополняемых подформаций. А.Н. Скиба (1994г.) установил, что насыщенная формация является нильпотентной тогда и только тогда, когда в ней дополняема каждая подформация вида $\mathfrak{N}_p$. Обобщая эти результаты, В.В. Аниськов и А.Н. Скиба описали насыщенные формации, у которых каждая собственная насыщенная подформация либо π-разложима, либо дополняема. В работах Н.Г. Жевновой (1995–1996г.г.) было установлено внутренне строение ω -насыщенных формаций с дополняемыми подформациями. В частности, были описаны ω-насыщенные формации с булевой решеткой ω-насыщенных подформаций; ω-насыщенные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка всех ω-насыщенных формаций, лежащих между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, является решеткой с дополнениями; ω-насыщынные формации с $\mathfrak{N}_p$-дополняемыми подформациями.

В данной главе продолжаются исследования свойств ω-насыщенных формаций с определенными ограничениями на подформациях. В разделе 4.1 дано описание структуры ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$, у которой решетка всех ω-насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ (где $\mathfrak{H}$ — разрешимая формация классического типа) является булевой. В разделе 4.2 приведены некоторые следствия теоремы 4.1.11.

4.1 ω-Насыщенные формации, имеющие булевы решетки подформаций

Напомним, что для любой формации $\mathfrak{F}$ символом $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ обозначается такая подрешетка решетки l^{ω}, которая состоит из всех ω-насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ ($\mathfrak{F}$ — непустая ω-насыщенная формация).

Атом решетки — это ее наименьший ненулевой элемент, т.е. если $0 < a$, то в L не существует x такого, что $0 < x < a$. Длина $l(c)$ конечной цепи C — это число $|C| - 1$. Говорят, что частично упорядоченное множество P имеет длину n и пишут $l(P) = n$, где n — натуральное число, если в P существует цепь длины n и все цепи в P имеют длину $\leq n$.

Для доказательства основных результатов данного раздела нам понадобятся следующие предварительные сведения.

4.1.1 Лемма [53, с. 27]. *Подрешетка модулярной решетки модулярна.*

4.1.2 Лемма [53, с. 31]. *Любая модулярная решетка M с дополнениями является решеткой с относительными дополнениями.*

Ввиду замечания 3 работы [14] справедлива следующая

4.1.3 Лемма. *В однопорожденной ω-насыщенной формации содержится лишь конечное число разрешимых ω-насыщенных подформаций.*

4.1.4 Лемма [21]. *Любая модулярная решетка L с дополнениями, имеющая конечное число атомов, является решеткой конечной длины.*

4.1.5 Лемма [53, с. 32]. *В решетке L конечной длины с относительными дополнениями каждый элемент a является объединением содержащихся в нем атомов.*

4.1.6 Лемма [11-A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — произвольная ω-насыщенная формация, $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{M}$ — атом решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, когда*

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{R}$ — некоторая минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Необходимость. По условию леммы длина решетки $\mathfrak{M}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ равна 1. Следовательно, формация $\mathfrak{M}$ обладает максимальной ω-насыщенной $\mathfrak{H}$-подформацией. Применяя теорему 2.1.13, получаем, что $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ — некоторая минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Предположим, что формация $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{K}$ не является атомом решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Тогда в формации $\mathfrak{F}$ найдется такая ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{L}$, что $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \subset \mathfrak{L} \subset \mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{K}$.

Так как $\mathfrak{L}$ не содержится в $\mathfrak{H}$, то по лемме 2.1.10 формация $\mathfrak{L}$ обладает минимальной ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-подформацией $\mathfrak{L}_1$. Тогда

$$\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{K}.$$

Следовательно, ввиду леммы 2.1.12, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}$. Значит,

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{K} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}.$$

Противоречие. Таким образом, формация $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{K}$ является атом решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

4.1.7 Лемма [11-А]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа. Тогда в каждой однопорожденной не $\mathfrak{H}$-формации содержится лишь конечное множество ω-насыщенных подформаций с ω-насыщенным $\mathfrak{H}$-дефектом 1.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа. И пусть $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{formG}$ для некоторой группы G.

Рассмотрим произвольную минимальную ω-насыщенную не $\mathfrak{H}$-подформацию $\mathfrak{L}$ формации $\mathfrak{F}$. По лемме 2.1.3 формация $\mathfrak{L}$ имеет вид $\mathfrak{L} = l^{\omega}\mathrm{form}L$, где L — монолитическая группа с цоколем $P = L^{\mathfrak{H}}$, удовлетворяющая условиям леммы 2.1.3.

Предположим, что цоколь P группы L является абелевым. Тогда так как $L/P \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$, то L является разрешимой группой. Т.е. формация $\mathfrak{L}$ — разрешима. Но ввиду леммы 4.1.3, в формации $\mathfrak{F}$ содержится лишь конечное множество разрешимых ω-насыщенных подформаций. Следовательно, в формации $\mathfrak{F}$ существует лишь конечное множество минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций вида $l^{\omega}\mathrm{form}L$, где L — монолитическая группа с абелевым цоколем $P = L^{\mathfrak{H}}$, удовлетворяющая условиям леммы 2.1.3.

Пусть теперь цоколь P группы L неабелев и $p \in \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$. Тогда по лемме 2.4.2 $F_p(L) = 1$. Следовательно,

$$L \simeq L/F_p(L) \in l(p) \subseteq f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)) = \mathrm{form}(\mathbf{H}(G/F_p(G))),$$

где $l(p)$ и $f(p)$ — минимальные ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Применяя лемму 2.1.6, получаем, что $L \in \mathbf{H}(G/F_p(G))$. Но порядок группы G конечен. Значит существует конечное число гомоморфных образов группы $G/F_p(G)$. А следовательно существует и конечное число монолитических групп $L \in \mathbf{H}(G/F_p(G))$ с неабелевым цоколем P ($p \in \pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$), порождающих минимальные ω-насыщенные не $\mathfrak{H}$-подформации формации $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$.

Пусть, наконец, цоколь P группы L неабелев и $\pi(L) \cap \omega = \varnothing$ либо $\omega \cap (\pi(L) \backslash \pi(P)) \neq \varnothing$. Тогда $G_{\omega d} = 1$ и

$$L \simeq L/G_{\omega d} \in l(\omega') \subseteq f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}) = \mathrm{form}(\mathrm{H}(G/G_{\omega d})).$$

Опять применяя лемму 2.1.6 и рассуждая аналогично случаю, рассмотренному выше, получаем, что в $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$ содержится лишь конечное число минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, порожденных монолитической группой L с неабелевым цоколем P ($\pi(L) \cap \omega = \varnothing$ либо $\omega \cap (\pi(L) \backslash \pi(P)) \neq \varnothing$). Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ существует лишь конечное множество минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация в $\mathfrak{F}$, содержащая максимальную ω-насыщенную $\mathfrak{H}$-подформацию. По теореме 2.1.13 формация $\mathfrak{F}_1$ представима в виде $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация, а $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация. Значит, из доказанного выше следует, что в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество ω-насыщенных подформаций с $\mathfrak{H}$-дефектом 1. Лемма доказана.

4.1.8 Лемма [11-A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \vee^{\omega}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} | \mathfrak{M} \subseteq \Omega(\mathfrak{F}))$, где $\Omega(\mathfrak{F})$ — множество всех ω-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{H}$. Значит, существует такая ω-насыщенная подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$, что $G \in \mathfrak{M}$. Так как $G \in \mathfrak{M}$ и $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in \vee^{\omega}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} | \mathfrak{M} \subseteq \Omega(\mathfrak{F}))$.

Пусть теперь $G \in \vee^{\omega}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} | \mathfrak{M} \subseteq \Omega(\mathfrak{F}))$. Тогда существует такая ω-насыщенная подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$, что $G \in \mathfrak{M}$ и $G \in \mathfrak{H}$. Но тогда $G \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

4.1.9 Лемма [11-A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — однопорожденная ω-насыщенная формация ($\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$) и $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — решетка с дополнениями. Тогда каждый элемент $\mathfrak{M}$ решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ представим в виде объединения атомов, содержащихся в нем, т.е. $\mathfrak{M} = \vee^{\omega}((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_i \mid i \in I) = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Ввиду лемм 2.1.9 и 4.1.1 решетка ω-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ модулярна. Следовательно, решетка $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, как подрешетка модулярной решетки, также модулярна. Применяя лемму 4.1.2, получаем, что $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — модулярная решетка с относительными дополнениями. Кроме того, ввиду лемм 4.1.6 и 4.1.7 решетка $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ имеет конечное число атомов. Значит, по лемме 4.1.4 решетка имеет конечную длину. Применяя теперь к решетке $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ леммы 4.1.5, 4.1.6 и 4.1.8, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

4.1.10 Лемма [11-A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — некоторая ω-насыщенная формация ($\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$), и пусть $\Sigma = \{\mathfrak{M}_i | i \in I\}$ — некоторый набор атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, причем $\mathfrak{M} = \vee^{\omega}(\mathfrak{M}_i | i \in I)$.*

Тогда если $\mathfrak{K}$ — элемент решетки $\mathfrak{M}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то в Σ найдется такой набор атомов $\{\mathfrak{M}_j | j \in J\}$, что $\mathfrak{K} = \vee^{\omega}(\mathfrak{M}_j | j \in J)$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{M}_i$ является атомом решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то ясно, что $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{K} \in \{(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}), \mathfrak{M}_i\}$. Пусть J — такое подмножество множества

I, что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{M}_j$. Тогда получаем, что

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{K} \cap (\vee^\omega(\mathfrak{M}_i|i \in I) = \vee^\omega(\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{K}|i \in I) = \vee^\omega(\mathfrak{M}_j|j \in J).$$

Лемма доказана.

4.1.11 Теорема [6-А, 11-А]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация и $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}/^\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является булевой;

2) решетка ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}/^\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями;

3) формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega (\vee^\omega \mathfrak{H}_i|i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i|i \in I\}$ — множество всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть справедливо условие 1) теоремы. Тогда так как по определению всякая булева решетка является решеткой с дополнениями, то условие 2) теоремы очевидно.

Пусть выполнено условие 2), т.е. $\mathfrak{F}/^\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями. И пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная однопорожденная ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ формацию $\mathfrak{M} \vee^\omega (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})$.

Ввиду лемм 2.1.9 и 4.1.1 решетка $\mathfrak{F}/^\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является модулярной решеткой с дополнениями. Следовательно, ввиду леммы 4.1.2 решетка $\mathfrak{F}/^\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с относительными дополнениями. Значит, $\mathfrak{M}_1/^\omega\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{H}$ — решетка с дополнениями.

Ввиду леммы 4.1.9 имеет место равенство

$$\mathfrak{M} = \vee^\omega((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega \mathfrak{H}_m \mid m \in M),$$

где $\{\mathfrak{H}_m \mid m \in M \subseteq I\}$ — набор всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций формации $\mathfrak{M}$. Для всякой группы G_i из $\mathfrak{F}$ $(i \in I)$ обозначим, через $\mathfrak{M}_i$ однопорожденную ω-насыщенную формацию $l^\omega \mathrm{form} G_i$. Так как $\mathfrak{F} = \vee^\omega(l^\omega \mathrm{form}\ G_i \mid G_i \in \mathfrak{F}, i \in I)$, то, применяя лемму 4.1.9, получаем, что

$$\mathfrak{F} = \vee^\omega(\mathfrak{M}_i|i \in I) = \Big(\vee^\omega ((\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega \mathfrak{H}_j|j \in J_i)|i \in I\Big),$$

где $\{\mathfrak{H}_j|j \in J_i\}$ — множество всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций однопорожденной формации $\mathfrak{M}_i$. Ввиду леммы 4.1.8, последнее равенство можно представить в виде

$$\Big(\vee^\omega ((\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega \mathfrak{H}_j|j \in J_i)|i \in I\Big) =$$

$$= \Big((\vee^{\omega}(\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{H}))|i \in I \Big) \vee^{\omega} \Big((\vee^{\omega}\mathfrak{H}_j | j \in J_i)|i \in I \Big) =$$
$$= (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i \mid i \in I),$$

где $\{\mathfrak{H}_i | i \in I\}$ — множество всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций формации $\mathfrak{F}$. Таким образом, справедливо условие 3) теоремы.

Пусть теперь выполнено условие 3). Покажем сперва, что в решетке ω-насыщенных формаций $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ дополняема любая подформация.

Обозначим через $\psi = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — множество всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, содержащихся в $\mathfrak{F}$. Покажем прежде, что каждый элемент решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ представим в виде объединения атомов, содержащихся в нем. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная ω-насыщенная формация, принадлежащая решетке $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_1$ ω-насыщенную формацию, порожденную множеством ψ_1 всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций, содержащихся в $\mathfrak{M}$, а через $\mathfrak{R}_2$ — ω-насыщенную формацию, порожденную множеством ψ_2, где ψ_2 — дополнение к ψ_1 в ψ. Ввиду леммы 2.1.9 имеет место равенство

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap ((\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i \mid i \in I)) =$$
$$= (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\mathfrak{M} \cap (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i \mid i \in I)) =$$
$$= (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R}_1 \vee^{\omega} \mathfrak{R}_2)) = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{R}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_2).$$

Допустим, что $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R}_2$ не содержится в $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Тогда по лемме 2.1.10 в $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R}_2$ имеется минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$. Следовательно, $\mathfrak{H}_i \subseteq \psi_1 \cap \psi_2 = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$.

Таким образом, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{R}_1$. Значит, ввиду леммы 4.1.6 и произвольности выбора формации $\mathfrak{M}$, каждый элемент решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ представим в виде решеточного объединения атомов, содержащихся в нем.

Установим теперь, что в решетке $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ дополняема каждая ω-насыщенная формация. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная ω-насыщенная формация из $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, то дополнением к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Итак, можем считать, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$. Обозначим через Σ множество всех атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, а через Ω_1 — множество всех атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, которые содержатся в $\mathfrak{M}$. Тогда $\Omega_1 \neq \Sigma$, иначе, ввиду доказанного выше, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i \mid i \in I) = \mathfrak{F}$.

Пусть Ω_2 — дополнение к Ω_1 в Σ и $\mathfrak{K} = l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega_2)$. Покажем, что $\mathfrak{K}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Так как по условию

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i \mid i \in I),$$

то ввиду леммы 4.1.6 имеет место равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\omega} \mathfrak{K}$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$ являются элементами решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{R}$. Допустим, что $\mathfrak{R}$ не содержится в $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Тогда по лемме 2.1.10 формация $\mathfrak{R}$ содержит минимальную ω-насыщенную не $\mathfrak{H}$-подформацию $\mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$. Следовательно, $\mathfrak{R}$ содержит формацию $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_i$. По теореме 2.1.13 формация $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_i$ содержит максимальную ω-насыщенную $\mathfrak{H}$-подформацию. Применяя лемму 2.1.12 и результат, полученный выше, имеем $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_i \in \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Таким образом, формация $\mathfrak{K}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Значит, решетка $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями.

Для доказательства дистрибутивности решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ рассмотрим три произвольные ω-насыщенные формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$, являющиеся элементами этой решетки. Очевидно, что $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}) \vee^{\omega} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{K} \vee^{\omega} \mathfrak{L})$.

Предположим, что обратное включение не верно, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{K} \vee^{\omega} \mathfrak{L}) \backslash (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}) \vee^{\omega} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L})$.

Для всякой группы G_k из $\mathfrak{K}$ $(k \in K)$ положим $\mathfrak{K}_k = l^{\omega}\mathrm{form} G_k$. Поскольку решетка $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями, то, ввиду леммы 4.1.2, решетка $\mathfrak{K}_k \vee^{\omega} (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ также является решеткой с дополнениями. Тогда, используя леммы 2.1.9 и 4.1.1, получаем, что для всех $k \in K$ верно $\mathfrak{K}_k \vee^{\omega} (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})/^{\omega}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}) \simeq \mathfrak{K}_k/^{\omega}\mathfrak{K}_k\cap\mathfrak{H}$. Таким образом для всех $k \in K$ решетка $\mathfrak{K}_k/^{\omega}\mathfrak{K}_k \cap \mathfrak{H}$ также является решеткой с дополнениями.

Так как $\mathfrak{K} = \vee^{\omega}(l^{\omega}\mathrm{form}\ G_k \mid G_k \in \mathfrak{K}, k \in K)$, то, применяя лемму 4.1.9, получаем, что $\mathfrak{K} = \vee^{\omega}(\mathfrak{K}_k | k \in K) = \vee^{\omega}\big(((\mathfrak{K}_k \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_j | j \in J_k) | k \in K\big)$, где $\Omega(\mathfrak{K}_k) = \{\mathfrak{H}_j | j \in J_k\}$ — множество всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций однопорожденной ω-насыщенной формации $\mathfrak{K}_k$ $(k \in K)$. Используя лемму 4.1.8, из последнего равенства получаем, что

$$\mathfrak{K} = \vee^{\omega}(\mathfrak{K}_k | k \in K) = \vee^{\omega}\Big(\vee^{\omega} \big(((\mathfrak{K}_k \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} \mathfrak{H}_j | j \in J_k)\big| k \in K\big)\Big) =$$

$$= \Big(\vee^{\omega} (\mathfrak{K}_k \cap \mathfrak{H} | k \in K)\Big) \vee^{\omega} \Big(\vee^{\omega} (l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{K}_k)) | k \in K)\Big) =$$

$$= (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{K}))) = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^{\omega} (l^{\omega}\mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{K}))),$$

где $\Omega(\mathfrak{K}) = \{\mathfrak{H}_k | k \in K\}$ — множество всех минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций ω-насыщенной формации $\mathfrak{K}$. Т.е. ω-насыщенная формация $\mathfrak{K}$ представима в виде решеточного объединения атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, содержащихся в $\mathfrak{K}$. Аналогично получаем, что ω-насыщенная формация $\mathfrak{L}$ представима в виде решеточного объединения атомов решетки $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, содержащихся в $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{X} = l^\omega \mathrm{form} G$. Тогда по лемме 4.1.9 ω-насыщенная формация $\mathfrak{X}$ представима в виде решеточного объединения атомов решетки $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, содержащихся в $\mathfrak{X}$. Кроме того, так как

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{K} \vee^\omega \mathfrak{L} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^\omega \Big(\big(l^\omega \mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{K}))\big) \vee^\omega \big(l^\omega \mathrm{form}(\Omega(\mathfrak{L}))\big)\Big),$$

то, ввиду леммы 4.1.10, получаем, что часть атомов ω-насыщенной формации $\mathfrak{X}$ содержится в $\mathfrak{K}$, либо в $\mathfrak{L}$. В любом из этих случаев оказывается, что $\mathfrak{X} \subseteq (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}) \vee^\omega (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L})$. Полученное противоречие доказывает, что

$$(\mathfrak{K} \vee^\omega \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}) \vee^\omega (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{L}).$$

Ввиду произвольности выбора ω-насыщенных формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$, получаем, что решетка $\mathfrak{F}/^\omega \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является дистрибутивной. Следовательно, эта решетка по определению является булевой, т.е. выполнено условие 1). Теорема доказана.

4.2 Некоторые следствия теоремы 4.1.11

Приведем некоторые следствия, вытекающие из теоремы 4.1.11.

Если $\omega = \{p\}$, то из теоремы 4.1.11 получаем

4.2.1 Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка p-насыщенных формаций $\mathfrak{F}/^p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является булевой;

2) решетка p-насыщенных формаций $\mathfrak{F}/^p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями;

3) формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee^p (\vee^p \mathfrak{H}_i | i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i | i \in I\}$ — множество всех минимальных p-насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Если $\omega = \mathbb{P}$, то из теоремы 4.1.11 вытекает

4.2.2 Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая разрешимая формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка насыщенных формаций $\mathfrak{F}/_l \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является булевой;

2) решетка насыщенных формаций $\mathfrak{F}/_l \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является решеткой с дополнениями;

3) формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \vee_l (\vee_l \mathfrak{H}_i | i \in I)$, где $\{\mathfrak{H}_i | i \in I\}$ — множество всех минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Напомним, что пишут $\mathfrak{F} = D(\mathfrak{F}_i|i \in I)$, где $\{\mathfrak{F}_i|i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов класса групп $\mathfrak{F}$, если для любых различных i и j из I имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{i_1} \times ... \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, ..., A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, ..., i_t \in I$.

Если в качестве формации $\mathfrak{H}$ рассмотреть формацию (1), то из теоремы 4.1.11 получаем

4.2.3 Следствие [67]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) решетка ω-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева;

2) в $\mathfrak{F}$ дополняемы все минимальные ω-насыщенные подформации;

3) $\mathfrak{F} = D(\mathfrak{H}_i|i \in I)$ для некоторого набора $\{\mathfrak{H}_i|i \in I\}$ минимальных ω-насыщенных формаций.

Если в качестве формации $\mathfrak{H}$ рассмотреть формацию (1), а $\omega = \{p\}$, то из теоремы 4.1.11 получаем

4.2.4 Следствие [72]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}$ есть прямое произведение своих минимальных p-насыщенных подформаций;

2) решетка p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева;

3) в $\mathfrak{F}$ дополняемы все минимальные p-насыщенные подформации.

Если $\mathfrak{H} = (1)$, а $\omega = \mathbb{P}$, тогда из теоремы 4.1.11 вытекает

4.2.5 Следствие [65]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неединичная насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) решетка насыщенных подформаций $\mathfrak{F}$ булева;

2) формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна;

3) в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая подформация вида $\mathfrak{N}_p$, где p — некоторое простое число.

Доказательство. Пусть справедлива теорема 4.1.11. И пусть выполнено условие 1) следствия. Тогда, ввиду условия 3) теоремы 4.1.11 формация $\mathfrak{F} = \vee^\omega(\vee^\omega \mathfrak{N}_p|\ p \in P) = \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}_p$ $(p \in P)$ является минимальной насыщенной не (1)-подформацией формации $\mathfrak{F}$. Т.е. выполнено условие 2) следствия.

Пусть теперь выполнено условие 2) следствия. Так как по условию 2) теоремы 4.1.11 множество насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ является решеткой с дополнениями, то в $\mathfrak{F}$ дополняема любая подформация, а, значит, дополняема и каждая подформация $\mathfrak{N}_p$, где p — некоторое простое число. Т.е. выполнено условие 3) следствия.

Пусть, наконец, выполнено условие 3) следствия. Доказательство булевости решетки насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ очевидно ввиду условий 1) теоремы 4.1.11. Следствие доказано.

Если в качестве формации $\mathfrak{H}$ рассмотреть формацию $\mathfrak{N}$, то частым случаем теоремы 4.1.11 является следующее

4.2.6 Следствие [29]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная ω-насыщенная формация и $\{\mathfrak{H}_i | i \in I\}$ — множество минимальных ω-насыщенных ненильпотентных подформаций из $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ — решетка с дополнениями, когда $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i | i \in I)$.*

Если $\omega = \mathbb{P}$, $\mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$, то из теоремы 4.1.11 получаем

4.2.7 Следствие [64, 65]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Тогда и только тогда насыщенная формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна, когда в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая минимальная насыщенная подформация.*

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, то из теоремы 4.1.11 вытекает

4.2.8 Следствие [15-А]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-насыщенная формация, $\mathfrak{S}$ — формация всех разрешимых групп. Тогда и только тогда решетка $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ является решеткой с дополнениями, когда $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}) \vee^{\omega} (\vee^{\omega}\mathfrak{H}_i | i \in I)$, где $\mathfrak{H}_i$ — минимальные ω-насыщенные неразрешимые подформаций из $\mathfrak{F}$.*

4.3 Краткие выводы

Данная глава является примером практического применения результатов главы 2. В частности, исследуются свойства ω-насыщенных формаций с определенными ограничениями на подформациях. В разделе 4.1 установлено структурное строение ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$, у которой решетка всех ω-насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ (где $\mathfrak{H}$ — разрешимая формация классического типа) является булевой. В разделе 4.2 приведены следствия, вытекающие из теоремы 4.1.11.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации проведено систематическое изучение ω-насыщенных и n-кратно ω-насыщенных формаций с заданными ограничениями на решетку их подформаций. Основные результаты диссертации следующие.

Для произвольной формации классического типа $\mathfrak{H}$ получена классификация ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей максимальную ω-насыщенную $\mathfrak{H}$-подформацию $\mathfrak{M}$. Причем установлено, что всякая ω-насыщенная $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{M} \vee^{\omega} (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H})$ (где $\mathfrak{H}_1$ — минимальная ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация), а всякая ω-насыщенная не $\mathfrak{H}$-подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{H}_1 \vee^{\omega} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H})$, теорема 2.1.13 [5-А, 11-А, 19-А].

Установлено структурное строение приводимых ω-насыщенных формаций $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 2. В частности, доказано, что приводимые ω-насыщенные формации имеют $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефект 2 в том и только том случае, когда они либо содержат две различные минимальные ω-насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации с максимальными ω-насыщенными $\mathfrak{H}$-подформациями, либо одну неприводимую ω-насыщенную формацию $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 2, теорема 2.3.2 [6-А, 12-А].

Найдено описание конечных монолитических групп, порождающих неприводимые ω-насыщенные формации $\mathfrak{H}^{\omega}$-дефекта 2, теорема 2.4.4 [6-А, 12-А].

Развивая теорию критических формаций в классе n-кратно ω-насыщенных формаций, получена классификация минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формаций ($n > 1$), теорема 3.1.10 [7-А, 20-А]. Используя данную классификацию, установлено внутренне решеточное строение l_n^{ω}-приводимых формаций нильпотентного l_n^{ω}-дефекта 1, теорема 3.2.7, [8-А, 12-А] и нильпотентного l_n^{ω}-дефекта 2 ($n > 1$), теорема 3.3.2 [8-А, 12-А]; найдено описание конечных групп, порождающих l_n^{ω}-неприводимые формации нильпотентного l_n^{ω}-дефекта 2 ($\mathfrak{N} > 1$), теоремма 3.4.2 [8-А, 12-А, 22-А]. Тем самым дано полное решение проблемы А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова об описании n-кратно ω-насыщенных формаций нильпотентного l_n^{ω}-дефекта ≤ 2 [14, проблема 5] при $n > 1$.

Получен новый критерий булевости решетки всех ω-насыщенных подформаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — разрешимая формация классического типа, теорема 4.1.11 [6-А, 11-А]. Доказанная теорема показывает, что условие булевости решетки подформаций $\mathfrak{F}/^{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ равносильно тому, что либо данная решетка является решеткой с дополнениями, либо сама формация $\mathfrak{F}$ представима в виде содержащихся в ней атомов.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти приложения при изучении внутреннего строения ω-насыщенных формаций конечных групп и n-кратно ω-насыщенных формаций конечных групп, а также при исследовании решетки частично насыщенных и кратно частично насыщенных формаций.

Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе при преподавании спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Gaschuts, W. Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen / W. Gaschuts // Math. Z. — 1963. — Bd. 80, № 4. — P. 300–305.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. — М.: Наука, 1978. — 272 с.

3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — М.: Наука, 1989. — 253 с.

4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

5. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.

6. Guo, W. The theory of classes groups / W. Guo. — Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London:Kluwer Academic Press, 2000. — 421 p.

7. Шеметков, Л.А. О произведении формаций / Л.А. Шеметков // Докл. АН БССР. — 1984. — Т.28 — № 2. — С. 1001–103.

8. Скиба, А.Н. О частично локальных формациях / А.Н. Скиба, Л.А Шеметков // Докл. АН Беларуси. — 1995. — Т.39, № 3. — С. 123–143.

9. Халед, Аль-Шаро О пересечении некоторого семейства максимальных подгрупп конечной группы / Аль-Шаред Халед // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1996. — Вып. 9. — С.144–152.

10. Джехад, Джарадин Минимальные p-насыщенные ненильпотентные формации / Джарадин Джехад // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. — Вып. 8. — С. 59–64.

11. Джехад, Джарадин Частично локальные формации с системами наследственных подформаций / Джарадин Джехад, А.Н. Скиба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. — 1996. — № 3. — С. 13–16.

12. Джехад, Джарадин Элементы высоты 3 решетки p-насыщенных формаций / Джарадин Джехад // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1996. – Вып. 9. — С. 45–59.

13. Джехад, Джарадин О формациях с системами наследственных подформаций / Джарадин Джехад // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 1. — С. 1–5.

14. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 114–147.

15. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite

groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. — 1997. — Vol. 186. — P. 57–65.

16. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Communications in Algebra. — 1997. — Vol. 25, № 3. — P. 955–964.

17. Селькин, В.М. Минимальные наследственные ω-локальные не $\mathfrak{H}$-формации / В.М. Селькин // Украинский мат. журнал. — 2002. — Т. 54, № 3. — С. 45-56.

18. Сафонова И.Н. О частично насыщенных формациях с заданной системой подформаций / И.Н. Сафонова // IX Бел. мат. конф. — Гродно. — 2004. — С. 47–48.

19. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: сб. науч. тр. / Ин-т математики АН БССР, Труды Гомельского семинара; под ред. М.И. Слука. — Мн.: Наука и техника, 1986. — С. 135–148.

20. Скиба, А.Н. О подформациях многообразий алгебраических систем / А.Н. Скиба // Докл. АН БССР. — 1986. — Т. 30, № 1. — С. 9–12.

21. Шабалина, И.П. Модулярные и алгебраические решетки n-кратно ω-насыщенных формаций конечных групп : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / И.П. Шабалина. — Гомель, 2003. — 92 с.

22. Сафонов, В.Г. О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Украин. мат. журн. — 2006. — Т. 58, № 6. — С. 852–858.

23. Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Communications in Algebra. — 2007. — V. 35, № 11. — P. 3495–3502.

24. Shemetkov, L.A. On laws of lattices of partially saturated formations / L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, N. N. Vorob'ev // Asian-European Journal of Mathematics. — 2009. — V. 2, № 1. — P. 155–169.

25. Скиба, А.Н. О тождествах решетки частично-насыщенных формаций / А.Н. Скиба, Н.Н. Воробьев, Л.А. Шеметков // Докл. НАН Беларуси. — 2009. — Т. 53, № 1. — С. 15–18.

26. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Матем. заметки — 1987. — Т. 41, № 4. — С. 490–499.

27. Скиба, А.Н. О локальных формациях с ограниченным p-разложимым дефектом / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1991. — № 4. — С. 63–69.

28. Аниськов, В.В. О приводимых локальных формациях с заданным $\mathfrak{H}$-дефектом / В.В. Аниськов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1997. — № 4. — С. 65–68.

29. Жевнова, Н.Г. ω-локальные формации с дополняемыми подфор-

мациями: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Н.Г. Жевнова; Гом. гос ун-т им. Ф.Скорины. — Гомель, 1997. — 17 с.

30. Сафонов, В.Г. О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов И.Н. Сафонова // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф.Скорины. — 2005. — № 5(32). — С. 162–165.

31. Сафонов В.Г. О кратно локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1996. — Вып. 9. — С. 161–175.

32. Сафонов, В.Г. К теории тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов. — Гомель, 2008. — 34 с. — (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 15).

33. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. — Киев: Наукова думка. — 1980. — С. 37–50.

34. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н.Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980, № 4. — С. 27–33.

35. Скиба, А.Н. О минимальных локальных не π-сверхразрешимых формациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1985. — Вып. 1. — С. 109–117.

36. Скиба, А.Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР; отв. ред. Ю.И. Мерзляков. — Новосибирск: Наука, 1984. — № 4. — С. 101–118.

37. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Доклады АН БССР. — 1983. — Т. 27, № 9. — С. 780-782.

38. Скиба, А.Н. Характеризация конечных метанильпотентных групп / А.Н. Скиба // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, Вып. 3. — С. 345–351.

39. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. — Киев, 1993. — С. 258–268.

40. Скиба, А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1987. — Вып. 3. — С. 21–31.

41. Сафонов, В.Г. О минимальных кратно локальных формациях не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. — Вып. 8. — С. 109–138.

42. Сафонов, В.Г. Кратно локальные формации с заданными системами подформаций: автореф. дис. : канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / В.Г. Сафонов; Гом. гос. ун-т. — Гомель, 1996. — 17 с.

43. Wenbin, G. On totally local formations of groups / Wenbin Guo a; K. P. Shum // Communications in Algebra. — 2002. — V. 30 — P. 2117–2131.

44. Вэньбинь, Г. Об одном вопросе теории кратно локальных формаций / Го Вэньбинь // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 6. — 1263–1270.

45. Рыжик, В.Н. О критических p-локальных формациях / В.Н. Рыжик. — Гомель, 1997. — 12 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 58).

46. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-локальных несверхразрешимых формациях / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1998. — Вып. 12. — С. 123–130.

47. Сафонова, И.Н. К теории $\mathfrak{H}_{l^\omega}$-критических формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2001. — № 6 (17). — С. 124–133.

48. Сафонова, И.Н. К теории критических ω-насыщенных формаций конечных групп / И.Н. Сафонова // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С. — 2004. — № 11. — С. 9–14.

49. Сафонова, И.Н. К теории критических частично насыщенных формаций / И.Н. Сафонова // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2004. — № 6 (27). — С. 82–87.

50. Сафонова, И.Н. О критических частично насыщенных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. — 2006. — №2. — С. 51–55.

51. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-насыщенных не $\mathfrak{N}^n$-формациях / И.Н. Сафонова // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2006. — №5 (38). — С. 68–72.

52. Сафонова, И.Н. О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях / И.Н. Сафонова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 1999. — № 2. — С. 23-27.

53. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. — М. : Наука, 1984. — 568 с.

54. Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер — М. : Мир, 1981. — 456 с.

55. Libeseder, U. Formationsbildungen in endlichen auflösbaren Gruppen / U. Lubeseder. — Universitat Kiel, 1963. — 256 p.

56. Schmid, P. Every saturated formation is a local formation / P. Schmid // J. Algebra. — 1978. — Vol. 51, № 1. — P. 144–148.

57. Blessenohl, D. Uber Formationen und komplementierbare Hauptfaktoren / D. Blessenohl, B. Brewster // Arch. Math. — 1976. — Vol.27. — №4. — P. 347–351.

58. Скиба, А.Н. О формациях, порожденных классами групп / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1981. — № 3. — С. 33–39.

59. Higman, G. Some remarks on varieties of groups / G. Higman // Quart. J. Math. Oxford. — 1959. — Vol. 10, № 2. — P. 165-178.

60. Нейман, Х. Многообразия групп / Х. Нейман. — М.: Мир, 1969. — 262 с.

61. Скиба, А.Н. Факторизация p-локальных формаций / А.Н. Скиба, В.Н. Рыжик // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1997. — Вып. 11. — С. 114–118.

62. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп. — Минск: Наука и техника. — 1981. — С. 155–180

63. Эйдинов, М.И. О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // Тез. докл. IX Всесоюзн. симпозиум по теории групп. — М., 1984. — С. 101.

64. Ведерников, В.А. Вполне факторизуемые формации конечных групп / В.А. Ведерников // Вопр. алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1990. — Вып. 5. — С. 28–34.

65. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Изв. вузов. Сер. Математика. — 1994. — № 10. — С. 75–80.

66. Жевнова Н.Г. О p-локальных формациях с p-дополняемыми p-локальными подформациями // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1996. — Вып. 10. — С. 55–70.

67. Жевнова, Н.Г. ω-Локальные формации с булевой решеткой ω-локальных подформаций / Н.Г. Жевнова // Доклады НАН Беларуси. — 1997. — Т. 41, № 5. — С. 15–19.

68. Сафонова, И.Н. О существовании $\mathfrak{H}_\omega$-критических формаций / И.Н. Сафонова // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1999. — Вып. 15. — С. 121–129.

69. Селькин, В.М. О $\mathfrak{H}_{\Theta^\omega}$-критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1999. — Вып. 14. — С.127–131.

70. Джехад, Джарадин Классификация p-локальных формаций длины ≤ 3: Автореф. дис. Канд. физ.-мат. наук: Д 02.12.01 / Гом. гос. ун-т им.Ф.Скорины. — Гомель, 1996. — 15 с.

71. Частично локальные формации с заданными системами подформаций: отчет о НИР (заключительный): ГБЦМ 20-07 / УО "Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины"; рук. В.Г. Сафонов; исполн.: В.М. Селькин, В.В. Аниськов. — Гомель, 2001. — 69 с. — Библиогр.: с. 66–69. — № ГР 2000419.

72. Жевнова, Н.Г. p-насыщенные формации с дополняемыми p-насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А. Н. Скиба // Изв. вузов. Матем., — 1997. — № 5. — С. 23–29.

73. Джехад, Джарадин О p-насыщенных формациях с системами наследственных подформаций // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, — Физ.мат.мех. — 1995. — № 3. — С. 1–6.

Список публикаций соискателя

Статьи в научных журналах

1-А. Сафонов, В.Г. Частично насыщенные формации с π-нильпотентным дефектом 1 / В.Г.Сафонов, А.И. Рябченко // Вестн. Мозырского гос. пед. ун-та. — 2005. — № 2(13). — С. 16–20.

2-А. Рябченко, А.И. Частично насыщенные формации с π-специальным дефектом 1 / А.И. Рябченко // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф.Скорины. — 2006. — № 5. — С. 59–68.

3-А. Сафонов, В.Г. О ω-насыщенных формациях с π-разложимым дефектом 1 / В.Г.Сафонов, А.И. Рябченко // Вес. Магiлёускага дзярж. ун-та iм. А.А.Куляшова. — 2006. — № 4 (25). — С. 204–211.

4-А. Рябченко, А.И. О частично насыщенных формациях с $\mathfrak{X}$-дефектом 1 / А.И. Рябченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз-мат. навук. — 2008. — № 1. — С. 28–34.

5-А. Рябченко, А.И. О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф.Скорины. — 2008. — № 5(50), Ч.2. — С. 216–222.

6-А. Рябченко, А.И. К теории частично насыщенных формаций / А.И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф.Скорины. — 2008. — № 6(51), Ч.2. — С. 153–160.

7-А. Рябченко, А.И. О минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формациях / А.И. Рябченко // Вест. Полоцкого гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. — 2008. — № 9. — С.31–36.

8-А. Сафонов, В.Г Об одной проблеме теории кратно ω-насыщенных формаций / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Вест. Полоцкого гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. — 2009. — № 3. — С. 31–40.

Статьи в сборниках научных работ

9-А. Рябченко, А.И. Об однопорожденных ω-насыщенных формациях с заданной подрешеткой / А.И. Рябченко // Сб. науч. работ студентов и аспирантов учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» "Творчество молодых". — Гомель. — 2005. — С. 27–31.

10-А. Рябченко, А.И. Частично насыщенные формации с заданной структурой подформаций / А.И. Рябченко // Сб. науч. работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь "НИРС 2005": научн.изд. — Мн.: РУМЦ ФВН. — 2006. — С. 22.

Препринты

11-А. Рябченко, А.И. О свойствах ω-насыщенных формаций, имеющих решетку с дополнениями / А.И. Рябченко. — Гомель, 2008. — 30 с. — (Препринт / Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 16).

12-А. Сафонов, В.Г. О частично насыщенных формаций $\mathfrak{H}_\Theta$-дефекта ≤ 2 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко. — Гомель, 2008. — 34 с. — (Препринт / Гом. гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 23).

Тезисы докладов

13-А. Сафонов, В.Г. ω-Насыщенные формации π-разложимого дефекта 1 / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Матер. Юб. научно-практ. конф., посв. 75-летию со дня основания Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, 14-15 июня 2005 г. — Гомель. — 2005. — С. 111–113.

14-А. Сафонов, В.Г. О частично насыщенных формациях с заданной решеткой подформаций / В.Г.Сафонов, А.И. Рябченко // Матер. научн. конф. «Ломоносовские чтения» 2005 года и IV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов - 2005»; редкол.: В.А. Иванов [и др.]. — Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2005. — С. 141–142.

15-А. Рябченко, А.И. О ω-насыщенных формациях, имеющих заданную подрешетку с дополнениями / А.И. Рябченко // Новые матем. методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: тез. докл. VIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 14–16 марта 2005 г. / Гомел. гос. ун-т им. Ф.Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. — Гомель, 2005. — С. 217–219.

16-А. Safonov, V.G. About ω-saturated formations with π-nilpotent defect 1 / V.G. Safonov, A.I.Rjabchenko // 5th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts, Odessa, July 20–27, 2005. / Odessa I.I. Mechnikov National University, Kyiv Taras Shevchenko National University, Universite of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, Odessa A.S. Popov National Academy of Communication, Lugansk Taras Shevchenko National Pedagogical University; редкол.: В.В. Кириченко [и др.]. — Odessa, 2005. — P. 175.

17-А. Рябченко, А.И. Об ω-насыщенных формациях π-специального дефекта 1 / А.И. Рябченко // Матер. научн. конф. «Ломоносовские чтения» 2006 года и V Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов — 2006»; редкол.: В.А. Иванов [и др.]. — Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2006. — С. 123.

18-А. Рябченко А.И. О приводимых n-кратно ω-насыщенных фор-

мациях нильпотентного дефекта 2 / А.И. Рябченко // Классы групп, алгебр и их приложения: матер. Междунар. алгебр. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9-11 июля 2007 г. / Гомельский гос. ун-т им.Ф.Скорины; редкол.: В.С. Монахов (отв. ред.) [и др.]. — Гомель. — 2007. — С. 117–118.

19-А. Rjabchenko, A. On ω-saturated formations with maximal classical type subformation / A.Rjabchenko // The 6th International Algebraic Conference in Ukraine. — Kamyanets-Podilsky, 2007. — P. 167–168.

20-А. Рябченко, А.И. О минимальных n-кратно ω-насыщенных ненильпотентных формациях / А.И. Рябченко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: тез. докл. XI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 17–19 марта 2008 г. / Гомел. гос. ун-т им. Ф.Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. в 2 ч. Ч. 2 — Гомель, 2008. — С. 18–19.

21-А. Рябченко, А.И. О свойствах n-кратно ω-насыщенных нильпотентных формаций / А.И.Рябченко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: тез. докл. XI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 17–19 марта 2008 г. / Гомел. гос. ун-т им. Ф.Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. в 2 ч. Ч. 2 — Гомель, 2008. — С. 19–20.

22-А. Сафонов, В.Г. Об одной задаче А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова / В.Г. Сафонов, А.И. Рябченко // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. Тезисы докладов; редкол.: Э.Б. Винберг [и др.]. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2008. — С. 203–205.